Corso di Matematica per Geologia

Prova scritta, 14/04/2023

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e si calcolino sia il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sia il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.
[**Facoltativo.** Si calcolino i prodotti vettoriali $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ e $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$.]

2. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi in particolare che la matrice ammette 3 autovettori, di cui uno è ortogonale agli altri due.
[**Facoltativo.** Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1}.]

3. Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x}}{x\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-2x^2}+(1-\cos 2x)}{(\sin x)^2(1-\cos x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)-\ln(1-x^3)}{\mathrm{e}^{x^3}-1}.$$

[**Facoltativo.** Si calcoli il terzo limite.]

4. Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2+1}.$$

In particolare

(a) si determini il dominio della funzione,
(b) si studi il segno della funzione,
(c) si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali o verticali,
(d) si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
(e) si determino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
(f) si disegni il grafico della funzione

[**Facoltativo.** Si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava.]

5. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2x^2y - y^2.$$

(a) Si determinino i punti stazionari di f e si stabilisca se sono massimi relativi, minimi relativi o punti di sella.
(b) Si calcoli la derivata direzionale di $f(x,y)$ in $(x,y) = (0,1/2)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1,0)$.

6. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{1}{xy^2}\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

7. Si consideri il campo vettoriale: $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = e^{x^2y}(2xy, x^2)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = 1 + 2t/\pi \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a $\pi/2$.

8. Si consideri la seguente equazione differenziale per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x' = x - \frac{1}{x}.$$

a) Si riconosca che nella regione in cui x è positivo il sistema ammette un solo punto di equilibrio x_{eq}, lo si determini e se ne stabilisca la natura stabile o instabile.

b) Si risolva l'equazione in corrispondenza del dato iniziale $x(0) = 2$.

c) Si calcolino i limiti della soluzione determinata al punto precedente per $t \to \pm\infty$ e si verifichi che i risultati siano compatibili con il valore del punto fisso x_{eq} determinato al punto (a) e con la sua natura stabile o instabile.

9. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' - x = e^t$$