

## Corso di Matematica per Geologia - AA 2021/2022

Prova scritta, 18/01/2023

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si considerino il vettore  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

- calcolare la traccia ed il determinante di  $A$ ;
- stabilire se  $A$  è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;
- determinare il vettore  $\vec{v} = A\vec{u}$ ;
- calcolare il prodotto scalare  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  e verificare la disuguaglianza  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ ;
- determinare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ;
- verificare che  $-1$  è un autovalore di  $A$  e se ne determini l'autovettore corrispondente.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\sqrt{1+x^2} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e^x - 1)}{\sqrt{1+x^2} - 1}.$$

3. Studiare il grafico della funzione ( $e$  è il numero di Nepero)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}.$$

In particolare:

- determinare il dominio di definizione e il segno della funzione;
- studiare l'esistenza di asintoti;
- determinare le proprietà di monotonia della funzione ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;
- studiare la concavità.
- [**Facoltativo**: determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto  $x = 0$ ].

4. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = e^{2xy}(x + y).$$

- Stabilire se la derivata direzionale di  $F$  lungo  $\vec{v} = (1, -\pi)$  nel punto  $(x, y) = (0, 1)$  è positiva o negativa;
- Stabilire se il punto  $(x, y) = (1, 1)$  è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

5. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_T x e^{x+y} dx dy$$

dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 0)$ .

6. Si consideri il campo vettoriale:  $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = \left( \frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2} \right)$  e se ne calcoli l'integrale curvilineo  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$  lungo la curva  $C$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2^t - 1 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

con il parametro  $t$  che va da 0 a 1.

7. Si risolva la seguente equazione differenziale per la funzione incognita  $x = x(t)$ :

$$x' = \cos^2 x$$

con dato iniziale  $x(0) = 0$ . Si verifichi che la soluzione è ben definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e si calcolino i limiti  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$ .

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita  $x = x(t)$ :

$$x'' + x' - 2x = t^2 + e^{-t}$$