

Corso di Matematica per Geologia

Prova scritta, 19/06/2023

| | |
|---------------------|--|
| Cognome e Nome | |
| Numero di matricola | |

1. Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^3 - 1)}{(x - 1)^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \operatorname{tg}(2x)}{(\sin x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - \sin x}{\ln(1 + x^2)}.$$

[**Facoltativo.**] Si calcoli l'altro limite.

2. Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^3(x + 1)e^{-4x}.$$

In particolare:

- si determini il dominio D_f della funzione,
- si studi il segno della funzione,
- si determini il comportamento della funzioni ai bordi del suo dominio di definizione, e si discuta l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali o verticali,
- si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente, e si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
- si disegni il grafico della funzione

[**Facoltativo.**] (f) Si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava. (g) Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .
- Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A . Si verifichi in particolare che gli autovettori sono ortogonali.

4. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

- Si determinino i punti stazionari di f sul suo dominio di definizione e si stabilisca se sono punti di massimo, minimo o sella.
- Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ in $(x, y) = (1, 1)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (0, -1)$.

5. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{\ln(xy)}{x^3 y^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ e } xy \geq 1\}$.

6. Si consideri il campo vettoriale: $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (x^2 \sin(\pi y), x e^{xy})$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la curva \mathcal{C} di equazione $y = x^3$ dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$.

7. Si consideri la seguente equazione differenziale per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x' = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

a) La si risolva l'equazione in corrispondenza del dato iniziale $x(0) = 2$.

b) Si riconosca che l'intervallo di definizione della soluzione $x(t)$ è della forma $[t_0, +\infty)$. Qual è il valore di t_0 ?

c) Si calcolino i limiti di $x(t)$ per $t \rightarrow t_0^+$ e per $t \rightarrow +\infty$.

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' + 4x' + 3x = e^t + e^{-t}$$