

Corso di Matematica per Geologia, AA 2021/2022

Prova scritta, 21/06/2022

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si considerino i vettori $\vec{u} = (7, -1, -2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$:

- calcolare il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$;
- calcolare il prodotto vettoriale $\vec{u} \times \vec{v}$ e verificare l'identità $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$;
- determinare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

- calcolare la traccia ed il determinante di A ;
- stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;
- calcolare il quadrato $A^2 = A \cdot A$;
- verificare che $\vec{v} = (1, -1, 0)$ è un autovettore di A e determinare l'autovalore associato.
- [**Facoltativo:** esibire un autovettore di A^8].

3. Calcolare i seguenti limiti (motivando la risposta):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x)}{e^{6x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin(x)}{e^{6x} - 1}.$$

4. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 - \log(x^2 - 3) - 7.$$

In particolare:

- determinare il dominio di definizione, discutendo eventuali simmetrie;
- studiare l'esistenza di asintoti;
- determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;
- [**Facoltativo:** studiare la concavità].

5. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = \log(\sin(x) + \cos(y)).$$

- Stabilire se la derivata direzionale di F lungo $\vec{v} = (-1, 2)$ nel punto $(x, y) = (0, -\pi)$ è positiva o negativa;
- Stabilire se il punto $(x, y) = (\pi/2, 0)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

6. Si calcoli il seguente integrale definito di singola variabile:

$$\int_1^4 \frac{1}{2x - \sqrt{x}} dx$$

7. Si consideri il campo di forze: $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (\alpha y \cos x, \sin x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro reale.
- (a) Si calcoli al variare di α il lavoro di $\vec{F}$ lungo la parabola di equazione $y = x^2$ dal punto $(0, 0)$ al punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4})$.
 - (b) Si determini il valore di α per cui $\vec{F}$ è conservativo e, per tale valore di α , si determini la primitiva di $\vec{F}$.
 - (c) Per il valore di α determinato al punto precedente, si verifichi che il lavoro calcolato al punto 1 è uguale alla differenza della primitiva tra i due estremi.
8. Si determini la soluzione della seguente equazione differenziale a variabili separabili per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x' = \frac{4}{x} + x$$

in corrispondenza del dato iniziale $x(0) = 2$. Si identifichi l'intervallo di esistenza della soluzione, e si calcoli il limite della soluzione per t che tende a $+\infty$.

9. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' - x' - 2x = e^t$$