

Corso di Matematica per Geologia - Modulo 2, AA 2021/2022

Simulazione esonero modulo 2, 1/11/2022

1. Si calcoli il seguente integrale definito di singola variabile:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

2. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{1}{y^2 - 1} dx dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0, 2)$, $(1, 4)$ e $(3, 2)$.

3. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ del campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \frac{e^{xy}}{(z^2+1)^2} (y(z^2+1), x(z^2+1), -2z)$ lungo la curva \mathcal{C} di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{t^2+1} \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = \ln(1 + t(e^t - 1)) \end{cases}$$

per t che va da 0 a 1.

4. Si consideri la seguente equazione differenziale a variabili separabili per la funzione incognita $x(t)$:

$$x' = x^2 + 2x$$

Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. Si scelga un dato iniziale che produca una soluzione che tende al punto di equilibrio stabile per $t \rightarrow +\infty$ e al punto di equilibrio instabile per $t \rightarrow -\infty$ e si calcoli esplicitamente tale soluzione.

5. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' + 4x' + 4x = 6te^{-2t}$$

6. [Facoltativo] Si risolva la seguente equazione delle onde sul segmento $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \sin x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos(x/2) \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$