Corso di Matematica per Geologia - AA 2021/2022

Simulazione prova scritta, 1/10/2022

1. Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

a) calcolare la traccia ed il determinante di A;

b) stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;

c) determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;

d) calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\,|\vec{w}|$;

e) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e verificare che $(2\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-2\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = 0$;

f) determinare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

g) verificare che $\vec{z} = (0, 0, 5)$ è un autovettore di A e determinare l'autovalore associato.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 \sin(2x^2)}{(e^{8x^3} - 1)^{4/3}}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 \sin(2x^2)}{(e^{8x^3} - 1)^{4/3}}.$$

3. Studiare il grafico della funzione (ln è il logaritmo naturale)

$$f(x) = 3x \ln(x^2).$$

In particolare:

a) determinare il dominio di definizione (discutendo eventuali simmetrie) e il segno della funzione;

b) studiare il comportamento della funzione ai bordi del dominio di definizione e stabilire l'eventuale esistenza di asintoti;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;

d) studiare la concavità.

e) [**Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -1$].

4. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = -\,e^{x^2 - xy + y^2}.$$

a) Stabilire se la derivata direzionale di F lungo $\vec{v} = (3, \pi)$ nel punto $(x, y) = (1, -1)$ è positiva o negativa;

b) Stabilire se il punto $(x, y) = (0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

5. Si calcoli il seguente integrale definito di singola variabile:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$$

6. Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\iint_A x^2 y^2 \, dx\, dy\, dz$$

dove C è il tronco di cono retto con base maggiore il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine e appartenente al piano $z = 0$ e base minore il cerchio di raggio 1 centrato nel punto $(0, 0, 2)$ e appartenente al piano $z = 2$.

7. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ del campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (xe^y, ye^x)$ lungo la semicirconferenza $\mathcal{C}$ centrata nell'origine, di raggio 1 e contenuta nel semipiano cartesiano superiore, percorsa in senso antiorario dal punto $(1, 0)$ al punto $(-1, 0)$.

8. Si risolva il seguente problema di Cauchy per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$\begin{cases} x' = e^{x-t} \\ x(0) = \ln 2 \end{cases}$$

Si calcoli in particolare l'intervallo di esistenza della soluzione $x(t)$ e il limite della stessa per t che tende ai bordi del dominino di definizione.

9. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' + x' + x = t + \sin t$$