**Corso di Matematica per Geologia - AA 2021/2022**

Simulazione prova scritta (1/11/2022)

| | |
|---|---|
| **Cognome e Nome** | |
| **Numero di matricola** | |

**1.** Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$:

a) calcolare la traccia ed il determinante di $A$;

b) stabilire se $A$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;

c) determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;

d) calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\,|\vec{w}|$;

e) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e verificare che $(3\vec{v} - 7\vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-3\vec{v} + 7\vec{w}) \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = 0$;

f) determinare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

g) verificare che $\vec{z} = (-2, 0, 0)$ è un autovettore di $A^2$ e determinare l'autovalore associato.

**2.** Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(2x^2) - 1}{3x\left(\sqrt{1 + 2x^3} - 1\right)}\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(2x^2) - 1}{3x\left(\sqrt{1 + 2x^3} - 1\right)}\,.$$

**3.** Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x}\,.$$

In particolare:

a) determinare il dominio di definizione (discutendo eventuali simmetrie) e il segno della funzione;

b) si calcoli il limite di $f(x)$ per $x$ che tende ai bordi del dominio di definizione e si identifichino eventuali asintoti;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;

d) studiare la concavità.

e) $\big[$**Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 1\big]$.

**4.** Si consideri la funzione (ln è il logaritmo naturale)

$$F(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)\,.$$

a) Stabilire se la derivata direzionale di $F$ lungo $\vec{v} = (e, 4)$ ($e$ è il numero di Nepero) nel punto $(x, y) = (-2, 1)$ è positiva o negativa;

b) Stabilire se il punto $(x, y) = (1, 1)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

**5.** Si calcoli il seguente integrale definito di singola variabile:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

**6.** Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_T \frac{1}{y^2-1}\,dx\,dy$$

dove $T$ è il triangolo di vertici $(0,2)$, $(1,4)$ e $(3,2)$.

**7.** Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s}$ del campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = \frac{e^{xy}}{(z^2+1)^2}\big(y(z^2+1), x(z^2+1), -2z\big)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{t^2+1} \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = \ln\big(1 + t(e^t - 1)\big) \end{cases}$$

per $t$ che va da 0 a 1.

**8.** Si consideri la seguente equazione differenziale a variabili separabili per la funzione incognita $x(t)$:

$$x' = x^2 + 2x$$

Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. Si scelga un dato iniziale che produca una soluzione che tende al punto di equilibrio stabile per $t \to +\infty$ e al punto di equilibrio instabile per $t \to -\infty$ e si calcoli esplicitamente tale soluzione.

**9.** Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' + 4x' + 4x = 6te^{-2t}$$