Esercizi - quarta settimana (16-20 ottobre 2023)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Si calcolino i seguenti integrali definiti:

- $\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\, dx$
- $\int_{-2}^{-1} \frac{2x^2-1}{x^2-2x}\, dx$
- $\int_0^1 \frac{e^{2u}}{4e^{2u}+4e^u+1}\, du$
- $\int_0^{2\pi} x \sin x \cos x\, dx$

2. Si calcolino i seguenti integrali indefiniti:

- $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx$
- $\int \frac{2x+5}{3x^2+6x+10}\, dx$
- $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta}\, d\theta$
- $\int \frac{x}{e^{-x^2}-1}\, dx$
- $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$ [**Suggerimento:** riscrivere l'integrale come funzione razionale di $\tan x$, poi risolvere l'integrale per sostituzione, ponendo $z = \tan x$.]

3. Il matematico tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) notò che la sostituzione $y = \tan(x/2)$ permette di convertire qualsiasi funzione razionale di $\sin x$ e $\cos x$ in una funzione razionale di y.

- Ponendo $y = \tan(x/2)$ mostrare che

$$\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \qquad \sin(x/2) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

- Usare il punto precedente per mostrare che

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

- Usare la sostituzione ai punti precedenti per calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin x - \cos x}$$

- Una volta identificata una primitiva $F(x)$, fare la verifica (i.e., controllare che $F'(x) = f(x)$).