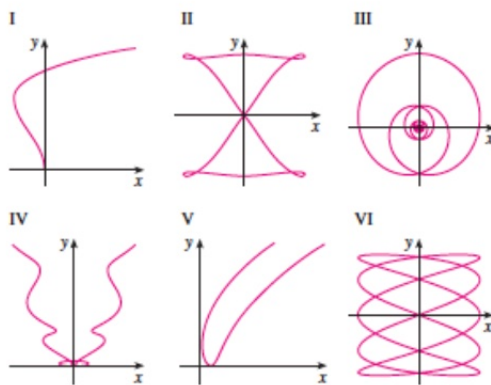


Esercizi - sesta settimana (30 ottobre - 3 novembre 2023)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Abbinare l'equazione parametrica con i grafici delle curve in figura, spiegando le ragioni della scelta.

1. $(t^4 - t + 1, t^2)$
2. $(t^2 - 2t, \sqrt{t})$
3. $(\sin(2t), \sin(t + \sin(2t)))$
4. $(\cos(5t), \sin(2t))$
5. $(t + \sin(4t), t^2 + \cos(3t))$
6. $(\frac{\sin(2t)}{4+t^2}, \frac{\cos(2t)}{4+t^4})$



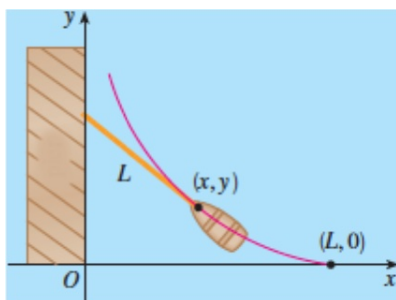
2. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve (in forma parametrica, cartesiana o polare, a seconda dei casi):

1. $(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}), 0 \leq t \leq 1$
2. $(\cos t, \sin t, \ln(\cos t)), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
3. $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}, 1 \leq x \leq 2$
4. $y = \ln \frac{1}{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
5. $\rho = \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$
6. $\rho = \sin^2(\theta/2), 0 \leq \theta \leq \pi$

3. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

- $\int_C (x + y) ds$, con C il bordo del triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.
- $\int_C \frac{y}{x+2} ds$, con C il bordo del semicerchio $S = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
- $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, con C la curva parametrica $(2(\cos t + t \sin t), 2(\sin t - t \cos t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

4. Un uomo, che inizialmente si trova nel punto O , cammina lungo un molo tirando una barca tramite una cima di lunghezza L . L'uomo mantiene la cima dritta e tesa, cosicché la cima rimane sempre tangente alla curva (si veda la figura). La curva risultante si chiama *trattrice*.



- Dimostrare che l'equazione cartesiana della trattrice è $y = f(x)$, con $0 < x \leq L$ e $f(x)$ tale che $f'(x) = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$.
 - Determinare $f(x)$.
 - Si calcoli la lunghezza della traiettoria percorsa dalla barca dall'istante iniziale a quello in cui la barca si trova a distanza $d \in (0, L)$ dal molo.
5. Un recinto a forma circolare ha raggio 10 m . Si consideri un sistema di assi cartesiani la cui origine si trovi al centro del recinto. L'altezza del recinto è data dalla funzione $h(x, y) = 4 + 0,001(x^2 - y^2)\text{ m}$ con h, x e y misurati in metri. Assumendo che 1 l di vernice copra 100 m^2 , quanta vernice serve per dipingere entrambi i lati del recinto?
6. Si calcoli la matrice d'inerzia di un'elica circolare di equazione $(R \cos t, R \sin t, \alpha t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, di densità lineare di massa costante ρ , rispetto al punto $(0, 0, \alpha\pi)$. Si determinino quindi i momenti e le direzioni principali d'inerzia.