**Esercizi - settima settimana (13 - 17 novembre 2023)**
Corso di Matematica II per Geologia

**1.** Si consideri il campo di forze $\vec{F}(x,y) = (x^2, xy)$. Si calcoli il lavoro

$$\int_{\mathcal{C}:\ A\to B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della porzione di parabola di equazione $x = y^2$ che va dal punto $A = (0,0)$ al punto $B = (1,1)$.

**2.** Si consideri la funzione scalare in due variabili $H(x,y) = x^2 e^{xy}$.

- Se ne calcoli il gradiente $\vec{\nabla} H(x,y)$
- Si calcoli l'integrale del gradiente

  $$\int_{\mathcal{C}:\ A\to B} \vec{\nabla} H \cdot d\vec{s}$$

  lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della porzione di iperbole di equazione $y = 1/x$ che va dal punto $A = (1,1)$ al punto $B = (2,1/2)$ con due metodi differenti:

  – con il calcolo diretto;
  – usando il teorema per cui l'integrale di $\vec{\nabla} H$ lungo un cammino da $A$ a $B$ è uguale alla differenza di $H$ calcolata tra gli estremi;

  e si verifichi che i due risultati sono uguali.

**3.** Si consideri il campo vettoriale $\vec{u}(x,y) = (xy^2, x^2y)$.

- Si calcoli l'integrale

  $$\int_{\mathcal{C}:\ A\to B} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

  lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della linea spezzata che connette il punto $A = (0,1)$ con il punto $P = (3,1)$ con un segmento orizzontale e poi il punto $P$ con il punto $B = (3,4)$ con un segmento verticale.

- Si riconosca che $\vec{u}$ è il gradiente di una funzione scalare $w(x,y)$ e si identifichi tale funzione (a meno di una costante additiva arbitraria).

- Si ricalcoli l'integrale del primo punto usando il teorema per cui l'integrale del gradiente di $w$ lungo un cammino da $A$ a $B$ è uguale alla differenza di $w$ calcolata tra gli estremi, e si verifichi che il risultato è lo stesso di quello ottenuto sopra per calcolo diretto.

**4.** Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (e^z, e^x, e^y)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(1,0,1)$ al punto $(1,1,e)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

con il parametro $t$ che va da 0 a 1.

**5.** Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = e^{xz}(y^2z + xy^2z^2, 2xyz, xy^2 + x^2y^2z)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(0,1,0)$ al punto $(1,-1,-1)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \cos(\pi t) \\ z(t) = t\cos(\pi t) \end{cases}$$

con il parametro $t$ che va da 0 a 1. [**Suggerimento:** si verifichi preliminarmente che il campo vettoriale assegnato è chiuso; se ne calcoli la primitiva e si calcoli così l'integrale assegnato.]

**6.** Si verifichi che i seguenti campi vettoriali $\vec{F}(x,y)$ su $\mathbb{R}^2$ sono conservativi e per ognuno di essi se ne calcoli la primitiva (ovvero, la funzione scalare $H(x,y)$ tale che $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} H(x,y)$):

- $\vec{F}(x,y) = (x^2y + y^2 + 1, x^3/3 + 2xy)$
- $\vec{F}(x,y) = (2e^y - ye^x, 2xe^y - e^x)$
- $\vec{F}(x,y) = (\frac{1}{1+y^2}, \frac{-2xy}{(1+y^2)^2})$

**7.** Si verifichi che il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy)$ su $\mathbb{R}^3$ è conservativo e se ne calcoli la primitiva.