

Esercizi - ottava settimana (20-24 novembre 2023)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Si calcolino i seguenti integrali doppi usando coordinate cartesiane (prima di procedere al calcolo dell'integrale, si disegni il dominio di integrazione sul piano cartesiano):

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{x}{1+y} dx dy, & \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\} \\ \iint_T e^{y^2} dx dy, & \quad T = \{\text{triangolo di vertici } (0, 0), (0, 1), (2, 1)\} \\ \iint_D \frac{1}{\sqrt{y}} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1\} \end{aligned}$$

2. Si calcolino i seguenti integrali doppi in due modi, prima usando coordinate cartesiane, poi usando coordinate polari (prima di procedere al calcolo dell'integrale, si disegni il dominio di integrazione sul piano cartesiano). **Promemoria:** Il cambio di coordinate in coordinate polari negli integrali doppi consiste nel riscrivere $\iint_D f(x, y) dx dy$ nella forma $\iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$, dove D' è la riscrittura di D in coordinate polari.]

$$\begin{aligned} \iint_Q xy dx dy, & \quad Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\} \\ \iint_S (x - y) dx dy, & \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} \\ \iint_T \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, & \quad T = \{\text{trapezio di vertici } (1, 0), (1, 1), (3, 3), (3, 0)\} \end{aligned}$$

3. Si calcolino i seguenti integrali doppi usando coordinate polari (prima di procedere al calcolo dell'integrale, si disegni il dominio di integrazione sul piano cartesiano):

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\} \\ \iint_D x^2 e^{-x^2 - y^2} dx dy, & \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} \\ \iint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, & \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, x^2 + y^2 \geq 4\} \\ \iint_C \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, & \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 3, x^2 + y^2 \leq 9\} \end{aligned}$$