Esercizi - nona settimana (27 novembre - 1 dicembre 2023)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando la regione $R = \{0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq z \leq 2e^{-x} - 1\}$ attorno all'asse z .
2. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando la regione $R = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq z \leq 1 + \cos x\}$ attorno all'asse z .
3. Calcolare $\iint_D x^2 dx dy$ con D l'ellisse di semiassi 2 e 3 orientati lungo l'asse x e l'asse y , rispettivamente. [**Suggerimento.** Si usi il cambio di variabili $x = 2u \cos v, y = 3u \sin v$.]
4. Dopo aver disegnato sul piano cartesiano la regione $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x - y \leq 1, 1 \leq x + y \leq 3\}$, calcolare $\iint_Q (x - y) \log(x + y) dx dy$. [**Suggerimento.** Si usi il cambio di variabili $u = x - y, v = x + y$.]
5. Calcolare $\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ con T il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. [**Suggerimento.** Si usi il cambio di variabili $u = x - y, v = x + y$.]
6. Calcolare $\iiint_D x dx dy dz$ dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$$

7. Dopo aver disegnato schematicamente la regione $A = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 - x - y/2\}$, si calcoli $\iiint_A (x^2 + y^2)^5 dx dy dz$. [**Suggerimento.** Si usino coordinate cilindriche.]
8. Calcolare $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$ con B la palla di centro l'origine e raggio 5. [**Suggerimento.** Si usino coordinate sferiche.]
9. Determinare il volume del solido che giace tra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
10. Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\iiint_S \frac{y^2}{x^2} dx dy dz,$$

dove S è la sfera di raggio 1 centrata in $(1, 0, 0)$. [**Suggerimento.** Si usino coordinate sferiche.]

11. Calcolare $\iiint_E dx dy dz$ con E la regione di $\mathbb{R}^3$ racchiusa dall'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Sappiamo che la Terra non è una sfera perfetta, ma che a causa della rotazione i poli sono un po' schiacciati, quindi la forma della Terra è approssimativamente quella di un'ellissoide con $a = b = 6378$ km e $c = 6356$ km. Dare una stima del volume della Terra.

12. Nello studiare la formazione delle montagne, si stima la quantità di lavoro necessaria perché una montagna si sollevi dal livello del mare. Consideriamo una montagna a forma di un cono circolare retto. Supponiamo che la densità di massa in un punto (x, y, z) sia data da $\rho(x, y, z)$ (e supponiamo che le coordinate del punto siano quelle cartesiane standard, in un sistema di riferimento in cui z è l'asse verticale e il piano xy è orizzontale: z rappresenta quindi l'altezza del punto (x, y, z) rispetto al piano orizzontale di riferimento).

- Scrivere un integrale che rappresenti il lavoro necessario per la formazione della suddetta montagna.
- Il monte Fuji, in Giappone, è sostanzialmente a forma di un cono circolare retto, il cui raggio di base è 18897 m, l'altezza è 3779 m e la densità di massa è costante e pari a 3203 kg/m^3 .

Quanto lavoro è stato necessario per la formazione del monte Fuji assumendo che all'inizio la terra fosse al livello del mare?