Esercizi - decima settimana (4-8 dicembre 2023)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Si determinino le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali per $x = x(t)$:

$$(a) \quad x' = x + e^{2t}$$
$$(b) \quad x' = (\tan t)\, x + \cos t$$
$$(c) \quad x' = 2 + 2x + t + tx$$
$$(d) \quad x' + x = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$$
$$(e) \quad x' = \frac{x+1}{1-t}$$

2. Si determinino le soluzioni ai seguenti problemi di Cauchy per $x = x(t)$:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x\cos t + \sin t\, \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
$$(b) \quad \begin{cases} x' = 1 - 2tx \\ x(0) = 1 \end{cases}$$
$$(c) \quad \begin{cases} x' = 2x + e^{2t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, usando per due di essi (scelti a piacimento) il metodo di risoluzione generale per le equazioni differenziali lineari del prim'ordine e per gli altri due il metodo di separazione di variabili:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = \frac{x+1}{\sqrt{t}} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$
$$(b) \quad \begin{cases} x' = \frac{1-x}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$
$$(c) \quad \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$
$$(d) \quad \begin{cases} x' = 3te^{t^2}x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

4. Una lamiera metallica a forma di superficie sferica ha raggio $R_1 = 1$m ed è mantenuta a una temperatura costante $T_1 = 15^oC$. Una seconda lamiera a forma di superficie sferica, concentrica alla precedente, ha raggio $R_2 = 2$m ed è mantenuta a una temperatura costante $T_2 = 25^oC$. Nella regione tra le due lamiere, la temperatura $T(r)$ a distanza r dal centro comune delle due superfici soddisfa l'equazione differenziale

$$T'' + \frac{2}{r}T' = 0.$$

Definendo $S = T'$, allora S soddisfa un'equazione differenziale del prim'ordine: si risolva tale equazione per S e usare il risultato per ricavare un'espressione per $T(r)$, con $R_1 \leq r \leq R_2$, tale che $T(R_1) = T_1$ e $T(R_2) = T_2$.

5. Si consideri l'equazione differenziale $x' = x - x^3$. Si discutano qualitativamente le proprietà della soluzione al generale, identificando in particolare i punti di equilibrio del sistema e stabilendo se tali punti di equilibrio sono stabili o instabili. Sulla base di questa analisi qualitativa, si consideri la soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = x_0$ e si calcoli (senza risolvere l'equazione) il limite $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ al variare di x_0.

6. Si consideri l'equazione differenziale $x' = -x^2$.

- Si identifichi il punto di equilibrio del sistema e si stabilisca se è stabile o instabile.
- Sulla base di un'analisi qualitativa della soluzione, si calcoli (senza risolvere l'equazione) il limite $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ per soluzioni $x(t)$ con dati iniziali $x(0) = x_0 > 0$. Analogamente, si calcoli $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ per soluzioni $x(t)$ con dati iniziali $x(0) = x_0 < 0$.
- Si verifichi che tutte le funzioni della forma $x(t) = \frac{1}{t+c}$, con c una qualsiasi costante reale, sono soluzioni dell'equazione differenziale assegnata.
- Esiste una soluzione dell'equazione assegnata che non sia della forma precedente? [**Suggerimento**: si identifichi la soluzione con dato iniziale nullo.]
- Si calcoli la soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = 1/2$. Qual è il più grande intervallo contenente l'origine su cui è definita tale soluzione?

7. Per ognuna delle seguenti equazioni differenziabili a variabili separabili, si identifichino i punti di equilibrio e le corrispondenti soluzioni di punto fisso. Si discuta inoltre la natura stabile o instabile dei punti di equilibrio. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(t) = x_0$, per x_0 diverso dai punti di equilibrio; si verifichi che la soluzione esplicita soddisfa le proprietà di stabilità o instabilità identificate sopra.

$$\begin{aligned} &(a) \quad x' = -x^2 + 4x - 4 \\ &(b) \quad x' = \frac{1}{x} - x \end{aligned}$$

8. Per ognuna delle seguenti equazioni differenziabili a variabili separabili, si identifichino gli eventuali punti di equilibrio e le corrispondenti soluzioni di punto fisso. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(t) = x_0$, per x_0 diverso dai punti di equilibrio.

$$\begin{aligned} &(a) \quad x' = 2t\sqrt{1 - x^2} \\ &(b) \quad tx' = x \ln x \\ &(c) \quad x' = \frac{e^{-x^2}}{x} \end{aligned}$$