

Corso di Matematica 2 per Geologia – AA 2023/2024

Secondo esonero, 10/1/2024

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si consideri il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ definito come: $\vec{F}(x, y) = (xy^2e^{x^2}, ye^{x^2})$. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove C è la curva da $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ di equazione $y = x^3$, con $0 \leq x \leq 1$. [**Suggerimento.** Si verifichi che $\vec{F}$ è chiuso. Si noti che, visto che $\vec{F}$ è definito sull'insieme semplicemente connesso $\mathbb{R}^2$, allora è anche conservativo: se ne calcoli la primitiva $H(x, y)$ e si usi l'espressione di H per calcolare l'integrale curvilineo richiesto. **Facoltativo:** calcolare l'integrale curvilineo assegnato anche usando la sua definizione fondamentale, senza passare per il calcolo della primitiva, e si verifichi che il risultato ottenuto è lo stesso.]
2. Si calcoli $\iint_C (2x^2 + xy) dx dy$, dove C è il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine.
3. Si risolva il seguente problema di Cauchy, definito per $t > 0$:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + t^2 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

Si verifichi a posteriori che la soluzione è ben definita per ogni t reale, incluso $t = 0$.

4. Si consideri l'equazione differenziale a variabili separabili $x' = e^t(x^2 - 2x + 1)$.
 - Se ne identifichino i punti di equilibrio.
 - Si risolva l'equazione assegnata col dato iniziale $x(0) = 0$.
5. Si determini la soluzione generale dell'equazione:

$$x'' - 2x' + 2x = \cos t.$$

Nella famiglia di soluzioni di questa equazione, si identifichi quella che soddisfa i dati iniziali $x(0) = x'(0) = 0$.