

Corso di Matematica 2 per Geologia – AA 2023/2024

Simulazione del secondo esonero, 22/12/2023

1. Si consideri il campo vettoriale su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0, \}$ definito come: $\vec{F}(x, y) = (\frac{y}{xy+2y^2}, \frac{x+4y}{xy+2y^2})$.
Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove C è la curva da $A = (0, 1)$ a $B = (1, 2)$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2^t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 1].$$

[**Suggerimento.** Si controlli se $\vec{F}$ è chiuso. Se lo è, visto che $\vec{F}$ è definito sull'insieme semplicemente connesso D , allora è anche conservativo: se ne calcoli la primitiva $H(x, y)$ e si usi l'espressione di H per calcolare l'integrale curvilineo richiesto.]

2. Si calcoli $\iint_C \frac{y}{x^2+y^2} dx dy$, dove C è la parte di corona circolare di centro $(0, 0)$ e raggi 1 e 2 contenuta nel semipiano $y \geq 0$.
3. Si calcoli $\iiint_D (y^2 + z^2)^2 dx dy dz$ dove D è il cono di vertice $(3, 0, 0)$ e base circolare di raggio 1 (e centro l'origine) nel piano yz .
4. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2tx + e^{t^2} \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale a variabili separabili $x' = \frac{4}{x} - x$ per $x > 0$.
- Dopo aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = \frac{4}{x} - x$ sul dominio $x > 0$, si identifichi il punto di equilibrio dell'equazione differenziale assegnata nella regione $x > 0$ e si stabilisca se è stabile o instabile.
 - Si risolva l'equazione assegnata col dato iniziale $x(0) = 1$. Si calcoli il limite della soluzione $x(t)$ per t che tende a $+\infty$ e si verifichi che il valore trovato è compatibile con la (in)stabilità del punto di equilibrio determinata al punto precedente.
6. Si determini la soluzione generale dell'equazione:

$$x'' + 2x' + 10x = t - e^t.$$

Nella famiglia di soluzioni di questa equazione, si identifichi quella che soddisfa i dati iniziali $x(0) = x'(0) = 0$.