Corso di Matematica 2 per Geologia – AA 2023/2024

Simulazione del secondo esonero, 8/1/2024

1. Si consideri il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ definito come: $\vec{F}(x, y) = (2x(x + y), 2y(x + y))$. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove C è l'arco della spirale di Archimede definito da $\rho = \rho(\theta) := \theta$ con $\theta \in [0, \pi/2]$ [Suggerimento. Si scriva l'equazione della curva C in forma parametrica e poi si applichi la definizione di integrale curvilineo di un campo vettoriale lungo una curva parametrica.]
2. Si calcoli il seguente integrale doppio improprio:

$$\iint_Q \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove Q è il primo quadrante del piano cartesiano: $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$

3. Si calcoli $\iiint_D z dx dy dz$ dove D è l'insieme esterno al tetraedro T limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ ed interno alla sfera S ad esso circoscritta, ovvero la sfera di centro $(1/2, 1/2, 1/2)$ e raggio $\sqrt{3}/2$. [Suggerimento. Si calcoli l'integrale su D come la differenza tra quello su S e quello su T .]

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{t^2+1}x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale a variabili separabili $x' = 2t \cos^2 x$.
 - Se ne identifichino i punti di equilibrio.
 - Si risolva l'equazione assegnata col dato iniziale $x(0) = 0$.
6. Si determini la soluzione generale dell'equazione:

$$x'' - 2x' + x = t^2 + t.$$

Nella famiglia di soluzioni di questa equazione, si identifichi quella che soddisfa i dati iniziali $x(0) = x'(0) = 0$.