Esercizi - undicesima settimana (9-13 dicembre 2024)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Si consideri l'equazione differenziale $x' = x - x^3$. Si discutano qualitativamente le proprietà della soluzione al generale, identificando in particolare i punti di equilibrio del sistema e stabilendo se tali punti di equilibrio sono stabili o instabili. Sulla base di questa analisi qualitativa, si consideri la soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = x_0$ e si calcoli (senza risolvere l'equazione) il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ al variare di x_0 .
2. Si consideri l'equazione differenziale $x' = -x^2$.
  - Si identifichi il punto di equilibrio del sistema e si stabilisca se è stabile o instabile.
  - Sulla base di un'analisi qualitativa della soluzione, si calcoli (senza risolvere l'equazione) il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ per soluzioni $x(t)$ con dati iniziali $x(0) = x_0 > 0$. Analogamente, si calcoli $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ per soluzioni $x(t)$ con dati iniziali $x(0) = x_0 < 0$.
  - Si verifichi che tutte le funzioni della forma $x(t) = \frac{1}{t+c}$, con c una qualsiasi costante reale, sono soluzioni dell'equazione differenziale assegnata.
  - Esiste una soluzione dell'equazione assegnata che non sia della forma precedente? [**Suggerimento:** si identifichi la soluzione con dato iniziale nullo.]
  - Si calcoli la soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = 1/2$. Qual è il più grande intervallo contenente l'origine su cui è definita tale soluzione?
3. Per ognuna delle seguenti equazioni differenziabili a variabili separabili, si identifichino i punti di equilibrio e le corrispondenti soluzioni di punto fisso. Si discuta inoltre la natura stabile o instabile dei punti di equilibrio. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(t) = x_0$, per x_0 diverso dai punti di equilibrio; si verifichi che la soluzione esplicita soddisfa le proprietà di stabilità o instabilità identificate sopra.

$$(a) \quad x' = -x^2 + 4x - 4$$

$$(b) \quad x' = \frac{1}{x} - x$$

4. Per ognuna delle seguenti equazioni differenziabili a variabili separabili, si identifichino gli eventuali punti di equilibrio e le corrispondenti soluzioni di equilibrio. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(t) = x_0$, per x_0 diverso dai punti di equilibrio.

$$(a) \quad x' = 2t\sqrt{1-x^2}$$

$$(b) \quad tx' = x \ln x$$

$$(c) \quad x' = \frac{e^{-x^2}}{x}$$

5. Determinare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari del second'ordine omogenee:

$$(a) \quad x'' + 16x = 0$$

$$(b) \quad x'' + 7x' + 10x = 0$$

$$(c) \quad x'' - x' - 6x = 0$$

6. Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a) \begin{cases} x'' - x' - 2x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

7. Una massa di 10kg è attaccata a una molla con costante elastica 50N/m e lunghezza a riposo nulla. All'istante iniziale viene rilasciata a 2m dalla sua posizione di riposo con velocità nella direzione opposta di 12m/s, in un fluido che oppone una resistenza (misurata in Newton) pari a venti volte la velocità istantanea (misurata in metri al secondo). Determinare la posizione della molla in ogni istante.