Esercizi - quarta settimana (14-18 ottobre 2024)
Corso di Matematica II per Geologia

1. La temperatura giornaliera a Roma a metà ottobre 2024 si può modellizzare attraverso la funzione $T(t) = 20 + 4\sin(\frac{\pi(t-9)}{12})$ dove $0 \leq t \leq 24$ è il tempo misurato in ore a partire dalla mezzanotte e T è la temperatura misurata in gradi Celsius. Determinare la temperatura media dalle 9:00 alle 21:00.

2. Si calcolino i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali:

- $\int \frac{x^2+x-1}{2x+3}\, dx$
- $\int \frac{x-1}{x^2+x}\, dx$
- $\int \frac{x^3-1}{x^2+4x+4}\, dx$
- $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\, dx$

3. Si calcolino i seguenti integrali definiti:

- $\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$ [**Suggerimento:** Si usi il metodo di integrazione per sostituzione]
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\, dx$ [**Suggerimento:** Si usi il metodo di integrazione per parti]
- $\int_0^1 \frac{e^{2u}}{e^{2u}+3e^u+2}\, du$ [**Suggerimento:** Si usi il metodo di integrazione per sostituzione]
- $\int_0^{2\pi} x\sin x\cos x\, dx$ [**Suggerimento:** Dopo aver semplificato il prodotto $\sin x \cos x$ usando le formule di duplicazione, si usi il metodo di integrazione per parti]

4. Si calcolino i seguenti integrali indefiniti:

- $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\, dx$ [**Suggerimento:** Si usi il metodo di integrazione per sostituzione]
- $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta-2\sin\theta}\, d\theta$ [**Suggerimento:** Si usi il metodo di integrazione per sostituzione]
- $\int \frac{x}{e^{-x^2}-1}\, dx$ [**Suggerimento:** Si usi il metodo di integrazione per sostituzione]
- $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$ [**Suggerimento:** Si riscriva l'integrale come funzione razionale di $\tan x$, poi lo si risolva per sostituzione, ponendo $z = \tan x$]

5. Il matematico tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) notò che la sostituzione $y = \tan(x/2)$ permette di convertire qualsiasi funzione razionale di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ in una funzione razionale di y.

- Ponendo $y = \tan(x/2)$ mostrare che

$$\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \qquad \sin(x/2) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

- Usare il punto precedente per mostrare che

$$\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}, \quad dx = \frac{2}{1+y^2}dy$$

- Usare la sostituzione ai punti precedenti per calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin(x) - \cos(x)}$$

- Una volta identificata una primitiva $F(x)$, fare la verifica (i.e., controllare che effettivamente $F'(x) = f(x)$)