Esercizi - sesta settimana (28 ottobre - 1 novembre 2024)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Si consideri il campo vettoriale $\vec{u}(x, y) = (xy^2, x^2y)$. A esercitazione è stato calcolato l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}:\ A \to B} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della linea spezzata che connette il punto $A = (0, 1)$ con il punto $P = (3, 1)$ con un segmento orizzontale e poi il punto P con il punto $B = (3, 4)$ con un segmento verticale e si è mostrato che il risultato è uguale a 72.

- Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}':\ A \to B} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

  lungo il cammino $\mathcal{C}'$ che consiste della porzione di parabola $y = x^2/3 + 1$ delimitata dagli stessi punti A e B definiti sopra, orientata da A a B, e si verifichi che anche in questo caso il valore dell'integrale curvilineo è 72.

- Si riconosca che $\vec{u}$ è il gradiente di una funzione scalare $w(x, y)$ e si identifichi tale funzione (a meno di una costante additiva arbitraria).

- Si ricalcoli l'integrale del primo punto usando il teorema per cui l'integrale del gradiente di w lungo un cammino da A a B è uguale alla differenza di w calcolata tra gli estremi, e si verifichi che il risultato è lo stesso di quello ottenuto per calcolo diretto.

2. Si consideri la funzione scalare in due variabili $H(x, y) = (y + 1) \cos x$.

- Se ne calcoli il gradiente $\vec{\nabla} H(x, y)$

- Si calcoli l'integrale del gradiente

$$\int_{\mathcal{C}:\ A \to B} \vec{\nabla} H \cdot d\vec{s}$$

  lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della porzione di sinusoide di equazione $y = \sin x$ che va dal punto $A = (0, 0)$ al punto $B = (\pi/2, 1)$ con due metodi differenti:

  - con il calcolo diretto;
  - usando il teorema per cui l'integrale di $\vec{\nabla} H$ lungo un cammino da A a B è uguale alla differenza di H calcolata tra gli estremi;

  e si verifichi che i due risultati sono uguali.

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (x - z, 1 - xy, y)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(0,0,0)$ al punto $(1,1,1)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1. **Nota:** si usi la seguente definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale associata a un campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nel caso in cui la curva $\mathcal{C}$ sia rappresentata in forma parametrica, $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, con t che va da t_A a t_B:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_A}^{t_B} \Big[F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t) \Big] dt$$

4. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (e^z, e^x, e^y)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(1,0,1)$ al punto $(1,1,e)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1.

5. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \equiv (e^y, xe^y)$ e si calcoli

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

lungo il cammino di equazione cartesiana $y = f(x) \equiv x^2$, con x cha va da $x_A \equiv 0$ a $x_B \equiv 1$. **Suggerimento:** si applichi la definizione di integrale curvilineo; ciò fatto, si integri per parti il contributo che origina dal termine $\int_{x_A}^{x_B} F_1(x, f(x))dx$ e si noti che l'espressione risultante si cancella parzialmente con il contributo che origina dal termine $\int_{x_A}^{x_B} F_2(x, f(x))f'(x)dx$.