Esercizi - settima settimana (11 - 15 novembre 2024)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Si consideri il campo di forze: $\vec{F}(x,y) = (x^2y, e^{xy}x)$. Si calcoli il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva $y = x^p$ dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$ al variare del parametro $p > 0$.

2. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (\frac{x(1-\sin\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y(1-\sin\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}})$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(1,0)$ al punto $(0, e^{\pi/2})$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

con θ un parametro che va da 0 a $\pi/2$. [**Suggerimento:** si verifichi preliminarmente che il campo vettoriale assegnato è chiuso; il dominio di definizione, che va scelto in modo tale da contenere completamente la curva assegnata, può essere scelto senza buchi, quindi il campo è conservativo; se ne calcoli la primitiva e si calcoli così l'integrale assegnato.]

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (e^z, e^x, e^y)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(1,0,1)$ al punto $(1,1,e)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1.

4. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{2x}{x^2+yz^3}, \frac{z^3}{x^2+yz^3}, \frac{3yz^2}{x^2+yz^3})$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(0,1,1)$ al punto $(1,0,2)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t^2 \\ z(t) = 1 + \sqrt{t} \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1. [**Suggerimento:** si verifichi preliminarmente che il campo vettoriale assegnato è chiuso; il dominio di definizione, che va scelto in modo tale da contenere completamente la curva assegnata, può essere scelto senza buchi, quindi il campo è conservativo; se ne calcoli la primitiva e si calcoli così l'integrale assegnato.]

5. Si calcoli l'integrale doppio $\iint_R \cos(x + 2y)\, dx\, dy$ sul rettangolo $R = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ eseguendo prima l'integrale sulle x e poi sulle y, e viceversa, verificando che le due procedure forniscono lo stesso risultato, indipendentemente dall'ordine di integrazione scelto.

6. Si calcoli l'integrale doppio $\iint_Q x \ln(x^2 + y)\, dx\, dy$ sul quadrato $Q = [1, 2] \times [2, 3]$ eseguendo prima l'integrale sulle x e poi sulle y, e viceversa, verificando che le due procedure forniscono lo stesso risultato, indipendentemente dall'ordine di integrazione scelto.