Esercizi - ottava settimana (18-22 novembre 2024)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Si calcolino i seguenti integrali doppi usando coordinate cartesiane (prima di procedere al calcolo dell'integrale, si disegni il dominio di integrazione sul piano cartesiano):

$$\iint_A \frac{x}{1+y}\,dx\,dy, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$$
$$\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy, \qquad T = \{\text{triangolo di vertici } (0,0), (0,1), (2,1)\}$$
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dx\,dy\,, \qquad D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1)\}$$

2. Si calcolino i seguenti integrali doppi in due modi, prima usando coordinate cartesiane, poi usando coordinate polari (prima di procedere al calcolo dell'integrale, si disegni il dominio di integrazione sul piano cartesiano). [**Promemoria:** Il cambio di coordinate in coordinate polari negli integrali doppi consiste nel riscrivere $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ nella forma $\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$, dove D' è la riscrittura di D in coordinate polari.]

$$\iint_S (x-y)\,dx\,dy, \qquad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$$
$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad T = \{\text{trapezio di vertici } (1,0), (1,1), (3,3), (3,0)\}$$

3. Si calcolino i seguenti integrali doppi usando coordinate polari (prima di procedere al calcolo dell'integrale, si disegni il dominio di integrazione sul piano cartesiano):

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \ge 0,\ 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$$
$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$$
$$\iint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ x^2 + y^2 \ge 4\}$$
$$\iint_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \ge 3,\ x^2 + y^2 \le 9\}$$