

### Esercizi - nona settimana (25-29 novembre 2024)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando la regione  $R = \{0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq z \leq 2e^{-x} - 1\}$  attorno all'asse  $z$ .

2. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando la regione  $R = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq z \leq 1 + \cos x\}$  attorno all'asse  $z$ .

3. Calcolare  $\iint_D x^2 dx dy$  con  $D$  l'ellisse di semiassi 2 e 3 orientati lungo l'asse  $x$  e l'asse  $y$ , rispettivamente. [**Suggerimento.** Si usi il cambio di variabili  $x = 2u \cos v$ ,  $y = 3u \sin v$ .]

4. Dopo aver disegnato sul piano cartesiano la regione  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x - y \leq 1, 1 \leq x + y \leq 3\}$ , calcolare  $\iint_Q (x - y) \log(x + y) dx dy$ . [**Suggerimento.** Si usi il cambio di variabili  $u = x - y$ ,  $v = x + y$ .]

5. Calcolare  $\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  con  $T$  il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . [**Suggerimento.** Si usi il cambio di variabili  $u = x - y$ ,  $v = x + y$ .]

6. Calcolare  $\iiint_D x dx dy dz$  dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$$

7. Dopo aver disegnato schematicamente la regione  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 - x - y/2\}$ , si calcoli  $\iiint_A (x^2 + y^2)^5 dx dy dz$ . [**Suggerimento.** Si usino coordinate cilindriche, definite dal cambio di variabili  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z')$  definito come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z'. \end{array} \right. \quad ]$$

8. Determinare il volume del solido che giace tra il cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

9. Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\iiint_S \frac{y^2}{x^2} dx dy dz,$$

dove  $S$  è la sfera di raggio 1 centrata in  $(1, 0, 0)$ . [**Suggerimento.** Si usino coordinate sferiche.]

10. Calcolare  $\iiint_E dx dy dz$  con  $E$  la regione di  $\mathbb{R}^3$  racchiusa dall'ellissoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Sappiamo che la Terra non è una sfera perfetta, ma che a causa della rotazione i poli sono un po' schiacciati, quindi la forma della Terra è approssimativamente quella di un'ellissoide con  $a = b = 6378$  km e  $c = 6356$  km. Dare una stima del volume della Terra.

**11.** I pianeti non hanno densità costante al loro interno: usualmente sono più densi al centro e hanno una densità decrescente man mano che ci si avvicina alla superficie. Si consideri un pianeta sferico di raggio  $R = 6370$  km, con una densità che decresce linearmente con la distanza dal centro. Si supponga che al centro la densità sia  $1.3 * 10^4$  kg/m<sup>3</sup> e che alla superficie sia 2100 kg/m<sup>3</sup>. Si calcoli l'accelerazione di gravità  $g$  alla superficie (si ricordi che  $g = GM/R^2$  con  $G = 6.67 * 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup> la costante di gravitazione universale e  $M$  la massa totale del pianeta).

**12.** Nello studiare la formazione delle montagne, si stima la quantità di lavoro necessaria perché una montagna si sollevi dal livello del mare. Consideriamo una montagna a forma di un cono circolare retto. Supponiamo che la densità di massa in un punto  $(x, y, z)$  sia data da  $\rho(x, y, z)$  (e supponiamo che le coordinate del punto siano quelle cartesiane standard, in un sistema di riferimento in cui  $z$  è l'asse verticale e il piano  $xy$  è orizzontale:  $z$  rappresenta quindi l'altezza del punto  $(x, y, z)$  rispetto al piano orizzontale di riferimento).

- Scrivere un integrale che rappresenti il lavoro necessario per la formazione della suddetta montagna.
- Il monte Fuji, in Giappone, è sostanzialmente a forma di un cono circolare retto, il cui raggio di base è 18897 m, l'altezza è 3779 m e la densità di massa è costante e pari a 3203 kg/m<sup>3</sup>.

Quanto lavoro è stato necessario per la formazione del monte Fuji assumendo che all'inizio la Terra fosse al livello del mare?