

Esercizi - decima settimana (2-6 dicembre 2024)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Si calcoli $\iint_C (x^2 + y^2)(1 - z) \, dx \, dy \, dz$, dove C è il cilindro circolare retto di altezza 2 contenuto nel semispazio positivo $z \geq 0$, la cui base inferiore è il cerchio unitario centrato in $(1, 0, 0)$ contenuto nel piano xy , i.e., $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

2. Si calcoli $\iiint_S xyz^2 \, dx \, dy \, dz$, dove S è il quarto di sfera unitaria centrata nell'origine, contenuta nel 'primo quadrante' $x, y \geq 0$, i.e., $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

3. Si determinino le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali per $x = x(t)$:

$$(a) \quad x' = x + e^{2t}$$

$$(b) \quad x' = (\tan t)x + \cos t$$

$$(c) \quad x' = 2 + 2x + t + tx$$

$$(d) \quad x' + x = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$$

$$(e) \quad x' = \frac{x+1}{1-t}$$

4. Si determinino le soluzioni ai seguenti problemi di Cauchy per $x = x(t)$:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x \cos t + \sin t \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x' = 1 - 2tx \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x' = 2x + e^{2t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} x' = \frac{x+1}{\sqrt{t}} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} x' = \frac{1-x}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} x' = 3te^{t^2}x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

5. Una lamiera metallica a forma di superficie sferica ha raggio $R_1 = 1\text{m}$ ed è mantenuta a una temperatura costante $T_1 = 15^\circ\text{C}$. Una seconda lamiera a forma di superficie sferica, concentrica alla precedente, ha raggio $R_2 = 2\text{m}$ ed è mantenuta a una temperatura costante $T_2 = 25^\circ\text{C}$. Nella regione tra le due lamiere, la temperatura $T(r)$ a distanza r dal centro comune delle due superfici soddisfa l'equazione differenziale

$$T'' + \frac{2}{r}T' = 0.$$

Definendo $S = T'$, allora S soddisfa un'equazione differenziale del prim'ordine: si risolva tale equazione per S e usare il risultato per ricavare un'espressione per $T(r)$, con $R_1 \leq r \leq R_2$, tale che $T(R_1) = T_1$ e $T(R_2) = T_2$.