Esercizi - undicesima settimana (8-12 dicembre 2025)
Corso di Elementi di Matematica per le Geoscienze

1. Determinare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari del second'ordine omogenee:

$$(a)\ x'' + 2x' + 5x = 0$$
$$(b)\ 9x'' + 6x' + x = 0$$
$$(c)\ x'' - 3x' + 4x = 0$$
$$(d)\ 4x'' + 12x' + 9x = 0$$

2. Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a) \quad \begin{cases} x'' - 6x' + 10x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x'' - 10x' + 25x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

3. Determinare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari del second'ordine non omogenee:

$$(a)\ x'' - 3x' + 2x = 2t^2 - t + 3$$
$$(b)\ x'' - 2x' + 10x = 3t - 4$$
$$(c)\ x'' - 4x' = t^2 + 1$$
$$(d)\ x'' - 2x' - 3x = 8e^{3t} + \cos 2t$$
$$(e)\ x'' - 3x' + 2x = 2t^3 + 1 - t^2 + e^{2t}$$
$$(f)\ x'' - 2x' + x = te^t$$
$$(g)\ x'' - x' = t^3 + \cos t$$

4. Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a)\quad \begin{cases} x'' - 8x' + 16x = t^2 - t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} x'' + x' + x = t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x'' - 2x' + x = e^t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} x'' - x' - 2x = 2\sin t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} x'' + 9x = \sin t + e^{-t} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(f)\quad \begin{cases} x'' - 4x' + 4x = t + 2 + e^{2t} \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$$

$$(g)\quad \begin{cases} x'' + 2x' + 2x = e^t + \cos t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

5. Si consideri l'equazione per l'oscillatore armonico smorzato e forzato con forzante sinusoidale

$$mx'' + \lambda x' + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

con $m > 0$ la massa dell'oscillatore, $\lambda > 0$ il coefficiente di attrito, $k > 0$ la costante elastica, $F_0 > 0$ l'ampiezza della forzante e $\omega > 0$ la sua pulsazione. Dividendo ambo i membri per m, tale equazione si può riscrivere nella forma

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t), \tag{1}$$

con $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $f_0 = F_0/m$.

- Usando questa rappresentazione, si cerchi una soluzione particolare della (1) nella forma $x_p(t) = C\cos(\omega t + \theta)$ con $C > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$: si scrivano esplicitamente le espressioni di C e di θ come funzioni di f_0, γ, ω_0.
- Si calcoli la potenza media P esercitata dalla forza esterna sull'oscillatore usando la formula

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x_p'(t) F_0 \sin\omega t\, dt,$$

dove $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il periodo della forzante (la formula sopra dice che la potenza media è la media su un periodo del prodotto forza $\times$ velocità).

- Si verifichi che P, come funzione di ω, raggiunge il massimo per $\omega = \omega_0$ (condizione di *risonanza*).
- Si verifichi che alla risonanza $\omega = \omega_0$ la soluzione $x_p(t)$ è fuori fase rispetto alla forzante: se la forzante, come stiamo assumendo, è un seno, allora la soluzione $x_p(t)$ è un coseno, $x_p(t) = -C \cos \omega t$.