

Esercizi - seconda settimana (29 settembre - 3 ottobre 2025)

Corso di Elementi di Matematica per le Geoscienze

1. Una corda di lunghezza 4m e spessore trascurabile ha densità di massa lineare $\rho(x) = (9+2\sqrt{x})\text{Kg/m}$, con $0 \leq x \leq 4$ misurato in metri. Quanto pesa la corda? [**Suggerimento:** Una porzione infinitesima di corda di coordinata x e lunghezza dx ha peso $dm(x) = \rho(x)dx$. Quindi sommando (o meglio integrando) il contributo di tutte le porzioni infinitesime tra $x = 0$ e $x = 4$ si ottiene un peso totale di $M = \dots$]

2. Un secchio che pesa 4 Kg attaccato a una corda di peso trascurabile viene usato per tirare su della sabbia da un pozzo profondo 50 m. Il secchio viene riempito con 40 Kg di sabbia ed è tirato su a 1 m/s. Purtroppo nel secchio è presente un buco dal quale fuoriesce la sabbia a una velocità di 2 g/s. Quale è il lavoro necessario per tirare su il secchio? [**Suggerimento:** Se all'istante t il secchio con una certa quantità di sabbia pesa $M(t)$ (misurato in Kg), l'intensità della forza di gravità che agisce sul secchio è di $F(t) = M(t)g$ (misurata in N), dove $g = 10 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità, ed è orientata verso il basso (nota: per calcolare $M(t)$ va ricordato qual è il peso iniziale del secchio pieno di sabbia e quanta sabbia perde per unità di tempo). La forza usata per tirare su il secchio è ad ogni istante uguale e contraria alla forza di gravità (in particolare è uguale a tale forza in valore assoluto). Il lavoro effettuato in un piccolo intervallo di tempo di ampiezza dt a partire dall'istante t è $F(t)dh(t)$, dove $dh(t)$ è lo spostamento verticale che il secchio ha effettuato in quell'intervallo di tempo; ricordando che la velocità a cui viene alzato il secchio è $v = 1 \text{ m/s}$, tale spostamento altri non è che $dh(t) = vdt$. Calcolare infine il lavoro totale effettuato sommando (o meglio integrando) i contributi associati a ognuno di questi intervallini, tra l'istante iniziale $t = 0$ e l'istante finale (qual è tale istante finale? Quanto dura il sollevamento del secchio? Per calcolarlo, si ricordi a quale velocità viene sollevato e quanto è profondo il pozzo).]

3. Si calcolino i seguenti integrali definiti:

- $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$
- $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$
- $\int_{-2}^2 e^{2\theta} \sin(3\theta) d\theta$
- $\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}} dx$
- $\int_1^2 \frac{1}{1+x+x^2} dx$

4. Si calcolino i seguenti integrali indefiniti:

- $\int (\ln x)^2 dx$
- $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4} dx$
- $\int \frac{r^2}{r+4} dr$
- $\int x \cos(x^2 + 1) dx$