

### Esercizi - terza settimana (6-10 ottobre 2025)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Si stabilisca per quali valori di  $p > 0$  il seguente integrale converge:  $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ .
2. Si consideri la funzione  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ . Se ne faccia lo studio e se ne disegni il grafico. Si interpreti geometricamente il valore dell'integrale improprio  $\int_2^\infty f(x) dx$ , in termini dell'area di un'opportuna regione illimitata del piano cartesiano, e lo si calcoli.
3. Si consideri la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ . Se ne faccia lo studio e se ne disegni il grafico. Si interpreti geometricamente il valore degli integrali impropri  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ ,  $\int_2^\infty f(x) dx$ ,  $\int_3^\infty f(x) dx$ , in termini delle aree di tre diverse regioni illimitate del piano cartesiano, e li si calcoli.
4. Calcolare i seguenti integrali impropri o mostrare che sono divergenti:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{(3x+4)^4} dx, \\ & \int_{-\infty}^0 e^x dx, \\ & \int_1^\infty e^{x^2} dx, \\ & \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, \\ & \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^4} dx, \\ & \int_0^{\pi/2} \tan x dx, \\ & \int_0^{\pi/2} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx, \\ & \int_0^1 \left( \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) dx, \\ & \int_0^\infty \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} dx, \\ & \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx, \\ & \int_0^\infty x e^{-\sqrt{1+x^2}} dx, \\ & \int_0^\infty e^{-1/x} dx, \\ & \int_0^\infty e^{-2x} \sin x dx, \\ & \int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx. \end{aligned}$$

5. Per le seguenti funzioni in due variabili, si determini il dominio di definizione  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e se ne calcolino le derivate parziali rispetto alla  $x$  e rispetto alla  $y$  per ogni  $(x, y) \in D$ :

$$f(x, y) = e^{-x^2 y}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$f(x, y) = \tan(x + 2y)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + xy).$$

6. Eseguire le seguenti moltiplicazioni righe per colonne, specificando se il risultato è una matrice o un vettore:

- $A \cdot B$ , dove  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $A \cdot B$ , dove  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

- $A \cdot \vec{v}$ , dove  $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $A \cdot \vec{v}$ , dove  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 37 \end{pmatrix}$

7. Calcolare autovalori e autovettori delle seguenti matrici:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$