Esercizi — nona settimana (24-28 novembre 2025)
Corso di Elementi di Matematica per le Geoscienze

1. Determinare le coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro di un oggetto di densità costante avente la forma di una semisfera di raggio 5. [**Suggerimento.** Si usi il cambio alle coordinate sferiche].

2. Si calcoli il seguente integrale triplo

$$\iiint_S \frac{y^2}{x} dxdydz$$

dove S è la sfera di raggio 1 centrata in (1,0,0). [**Suggerimento.** Si usino le coordinate sferiche].

3. Calcolare $\iiint_E dxdydz$ con E la regione di $\mathbb{R}^3$ racchiusa dall'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.
Sappiamo che la Terra non è una sfera perfetta, ma che a causa della rotazione i poli sono un po' schiacciati, quidni la forma della Terra è approssimativamente quella di un'ellissoide con $a = b = 6378$ km e $c = 6356$ km. Dare una stima del volume della terra.

4. Si determinino le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali per $x = x(t)$

(a) $x' = x + e^{2t}$
(b) $x' = (\tan t)x + \cos t$
(c) $x' = 1 + 2x + t + tx$
(d) $x' + x = \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$
(e) $x' = \dfrac{x+1}{1-t}$

5. Si determinino le soluzioni ai seguenti problemi di Cauchy per $x = x(t)$

(a) $\begin{cases} x' = -x\cos t + \sin t \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = -1 - tx \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = \dfrac{1-x}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = 3te^{t^2}x \\ x(1) = 1 \end{cases}$