

APPELLO STRAORDINARIO – 20 APRILE 2009

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Calcolare la funzione inversa di $y = f(x) = \cos^2 x$ sull'intervallo $[\pi/2, \pi]$.

2. Determinare le radici complesse di $z^3 = 4 + 4i\sqrt{3}$.

3. Determinare il dominio di definizione di $f(x) = \log x / \sqrt{\tan(x + x^2)}$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Si calcoli l'inversa del quadrato di A .

5. Sia $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini un vettore \vec{w} perpendicolare a \vec{u} e parallelo a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.

Sia $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, con $|\vec{v}| \neq 0$.

1. Calcolare $\det A_\theta$ e la matrice inversa A_θ^{-1} . Si verifichi che $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.
2. Calcolare $\vec{v} \cdot (A_\theta \vec{v})$ e determinare l'angolo tra \vec{v} e $A_\theta \vec{v}$.
3. Verificare che $A_{\theta_1} \cdot A_{\theta_2} = A_{\theta_1 + \theta_2}$.
4. Determinare un versore ortogonale ad $A_\theta^3 \vec{v}$.

Esercizio 3.

Sia $f(x) = \log(2x - x^2)$.

1. Si calcoli lo sviluppo di Taylor del second'ordine in $x_0 = 1$ di $f(x)$.
2. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(e^x - e)^2}.$$

Esercizio 4.

Sia

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + x}{|x^2 - 2x|}}.$$

Si studi $f(x)$ (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali e/o obliqui, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.

Esercizio 5.

1. Calcolare

$$\int_1^e \frac{\log(x^2)}{x} dx .$$

2. Calcolare

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx .$$