

PRIMO APPELLO – SESSIONE ESTIVA – 22 GIUGNO 2009

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Mostrare che la funzione $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ è invertibile su $[1, +\infty)$ e calcolarne l'inversa.

2. Determinare le radici complesse di $z^2 + 2zi - 2 = 0$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli A^{-2} , ossia il quadrato dell'inversa di A .

4. Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determinino la lunghezza, la direzione e il verso di $\vec{w} \equiv \vec{v} \times \vec{u}$.

5. Calcolare lo sviluppo di Taylor del second'ordine in $x_0 = 0$ di $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

Esercizio 2.

1. Risolvere con la regola di Cramer il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ 2x + y - z & = & 2 \\ x + y - 2z & = & 1 \end{cases}$$

2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z & = & 0 \\ 2x + y + 2z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{cases}$$

Si stabilisca se è risolubile e, in caso lo sia, se ammette o no soluzione unica.

Esercizio 3.

Calcolare i seguenti limiti.

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - 1}{n}$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(\sqrt{n} - 1) - \log \sqrt{n - 1} \right]$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{\tan^2 x}$$

Esercizio 4.

Sia

$$f(x) = e^{x-|x^2-x-2|} .$$

Si studi $f(x)$ (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.

Esercizio 5.

1. Calcolare

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx .$$

2. Sia

$$F(t) = \int_0^t \frac{x+1}{x^2+1} dx .$$

(a) Si calcoli $F(t)$.

(b) Si calcoli $F'(t)$.

(c) Si calcoli, se esiste, $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+1} dx \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.