PRIMO APPELLO – SESSIONE ESTIVA – 7 LUGLIO 2009

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Mostrare che la funzione $y = f(x) = \sqrt{\log(1 + x^2)}$ è invertibile su $[0, +\infty)$ e calcolarne l'inversa.

2. Determinare le radici complesse di $z^4 - 3iz^2 - 2 = 0$.

3. Determinare il dominio di definizione di $f(x) = \log\big(\sin \sqrt{x}\big)$.

4. Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determinino le componenti del vettore $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{u} \times \vec{v}$.

5. Calcolare lo sviluppo di Taylor del second'ordine in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ di $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calcolare il determinante di A e verificare che A sia invertibile.

2. Si consideri il sistema lineare
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad ,$$
pensando le variabili x_1, x_2, x_3 come incognite e le variabili y_1, y_2, y_3 come parametri assegnati. Si risolva il sistema con la regola di Cramer, e si calcolino le incognite x_1, x_2, x_3 in termini dei parametri y_1, y_2, y_3.

3. Si riesprima il risultato del punto (2) in forma matriciale:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad ,$$
calcolando esplicitamente la matrice M. Si verifichi che $M = A^{-1}$ (ovvero, si verifichi che $M \cdot A = I$).

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti limiti.

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{1+n^3} - n\sqrt{n+1}\right]$$

3. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\sin x}$$

Esercizio 4.
Sia

$$f(x) = e - x \log x \,.$$

Si studi $f(x)$ (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.

Esercizio 5.

1. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^6}{x^7+1}\, dx \ .$$

2. Sia

$$F(t) = \int_0^t (1+x^2)\, e^{-x}\, dx \ .$$

   (a) Calcolare $F'(t)$.

   (b) Calcolare $F(t)$.

   (c) Stabilire se esiste

$$\int_0^\infty (1+x^2)\, e^{-x}\, dx \equiv \lim_{t\to+\infty} F(t)$$

   e, in caso, calcolarne il valore.