

ESERCITAZIONE DEL 4 NOVEMBRE 2008

Corso di Matematica I per Geologia

A. Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ tale che¹:

1. $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$, $|\mathbf{y}| = 3$ (Notazione: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ = “ \mathbf{a} è ortogonale a \mathbf{b} ”);
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, $|\mathbf{y}| = 10$;
3. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2$, $|\mathbf{y}| = 2$;
4. \mathbf{x} e \mathbf{y} formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$, $|\mathbf{y}| = 5$.

B. Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Calcolare:

1. l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $-\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $-\mathbf{x} - \mathbf{y}$;
2. l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $-\mathbf{x}$, \mathbf{y} , $\mathbf{y} - \mathbf{x}$;
3. l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} .

C. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

1. calcolare $A + B^T$;
2. calcolare AB , BA .

D. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

1. calcolare A^T e $\det A$;
2. dato $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ calcolare $A\mathbf{v}$;
3. calcolare A^{-1} e verificare che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
4. calcolare $\det A^4$.

¹Ogni punto corrisponde ad un vettore diverso!

E. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_1 = 2 \end{cases};$$

riscrivere il sistema nella forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

e trovare il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ che soddisfa questa relazione.

F. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

calcolare A^n, B^n per ogni intero positivo n .