

PRIMO APPELLO – 26 GENNAIO 2009

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

**Esercizio 1.** Rispondere alle seguenti domande.

1. Calcolare  $(\log_{\sqrt{2}} 4)^2 - 2 \log_{\sqrt{2}} 4$ .

2. Determinare le cinque radici complesse di  $z^5 + z = 0$ .

3. Calcolare la derivata di  $f(x) = [\sin(x^2)]^2$ .

4. Sia  $f(x) = \begin{cases} x \log |x| & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$   
Si stabilisca se  $f$  è continua in  $x = 0$ .

5. Calcolare l'area del parallelogramma di vertici  $(1, -1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(4, 4)$ .

6. Stabilire se  $f(x) = x \arctan x$  è invertibile su tutto il suo dominio di definizione  $D$ . Se non lo è, determinare un sottoinsieme di  $D$  su cui  $f$  è invertibile.

**Esercizio 2.**

Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calcolare  $\det A$  e la matrice inversa  $A^{-1}$ . Si verifichi che  $A \cdot A^{-1} = I$ .
2. Determinare il vettore  $\vec{w}$  tale che  $\vec{v} = A\vec{w}$ .
3. Calcolare  $\vec{v} \cdot (A\vec{v})$  e determinare il coseno dell'angolo tra  $\vec{v}$  e  $A\vec{v}$ .
4. Determinare un versore ortogonale ad  $A^2\vec{v}$ .

**Esercizio 3.**

Sia  $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x + x^2} - 1$ .

1. Si calcoli lo sviluppo di Taylor del second'ordine in  $x_0 = 0$  di  $f(x)$ .
2. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

**Esercizio 4.**

Sia

$$f(x) = \log \left( \frac{x^2 + 1}{|x + 1|} \right).$$

Si studi  $f(x)$  (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.

**Esercizio 5.**

1. Calcolare

$$\int_{-5}^{-3} \frac{x+3}{x^2-4} .$$

2. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{(\tan \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx .$$