

PRIMO ESONERO – 13 NOVEMBRE 2008

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

**Esercizio 1.** Rispondere alle seguenti domande (2 punti a domanda).

1. Si determini l'insieme di definizione di  $f(x) = \sqrt{\frac{e^{-x}}{\cos x}}$ .
2. Calcolare  $\log_9 \sqrt{3}$ .
3. Risolvere la disequazione  $8^{x+2} \geq 2^{x^2}$ .
4. Trovare le radici complesse dell'equazione  $z^2 + z + 1 = 0$ .
5. Si calcoli l'angolo tra i vettori  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .
6. Data  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si calcoli  $A^2 + 3I$ .

**Esercizio 2.**

Sia  $z = \frac{1-i}{1+i}$ .

1. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di  $z$ .
2. Calcolare il modulo  $\rho = |z|$  e l'argomento  $\theta = \arg z$ , e riscrivere  $z$  in forma trigonometrica.
3. Calcolare la parte reale di  $z^{100} - z^2$ .

**Esercizio 3.**

Sia

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right).$$

1. Si determini l'insieme  $D$  di definizione di  $f$ . Disegnare qualitativamente il grafico di  $y = f(x)$ .
2. La funzione  $f$  è invertibile sul suo dominio di definizione? Se lo è, calcolare  $f^{-1}$  e disegnarne qualitativamente il grafico. Se no, scegliere un sottoinsieme  $D' \subset D$  su cui  $f$  risulta invertibile, quindi calcolare la corrispondente  $f^{-1}$  e disegnarne qualitativamente il grafico.

**Esercizio 4.**

Siano  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Si calcoli  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .
2. Si calcoli il coseno dell'angolo  $\varphi$  tra  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .
3. Si calcoli  $(3\vec{v} + \vec{w}) \cdot (-\vec{v} + 2\vec{w})$ .
4. Sia  $\vec{u}_1$  un vettore perpendicolare a  $\vec{v}$  di lunghezza 3. Si calcoli  $|\vec{u}_1 \times \vec{v}|$ .
5. Si trovi un vettore  $\vec{u}_2$  che appartiene al piano  $xy$ , perpendicolare a  $\vec{v} + \vec{w}$  e di lunghezza 1.

**Esercizio 5.**

Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare il vettore  $\vec{u} = A\vec{v}$ .
2. Verificare che  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .
3. Determinare il vettore  $\vec{w}$  tale che  $B\vec{w} = \vec{v}$  (suggerimento: si riscriva l'equazione in coordinate, nella forma di un sistema lineare e si risolva tale sistema).
4. Calcolare gli autovalori di  $A$ .
5. (*Punto facoltativo*) Calcolare gli autovettori di  $A$ .