ESERCIZI DI RIEPLOGO SULLA SECONDA PARTE DEL CORSO

Corso di Matematica I per Geologia

A. Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni:

$$a)\, a_n = \frac{1-5n^2}{n^2+n}, \quad b)\, a_n = \sqrt{n} - n, \quad c)\, a_n = \frac{n + \sin n \cos n}{n^{\frac{3}{2}} + \log n};$$
$$d)\, a_n = \left(1 + \frac{e+1}{n}\right)^{2n}, \quad e)\, a_n = \log\left(1 + \frac{1}{e^n}\right), \quad f)\, a_n = n - \arctan n;$$
$$g)\, a_n = n \log\left(3 + \frac{1}{n^2}\right), \quad h)\, a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right), \quad i)\, a_n = \sqrt[n]{n^2 - n}.$$

B. Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad b)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin x \cos x}{x}, \quad c)\ \lim_{x\to0^-} \frac{a^x - 2}{x};$$
$$d)\ \lim_{x\to0^+} \frac{2^x - 3^x}{x^2}, \quad e)\ \lim_{x\to0} \frac{x^3 \tan 2x}{\log(1+x)}, \quad f)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \cos\frac{1}{8x}\right);$$
$$g)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^2}{\cos x}, \quad h)\ \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\cos(x^2) - 1}, \quad i)\ \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{\sqrt{\sin\left(|x-2|^2\right)}};$$
$$l)\ \lim_{x\to0} \frac{x\sin x + \log\left(1-x^2\right)}{x^2(2x+x^2)^2}, \quad m)\ \lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+3}{\cos\frac{\pi x}{2}}, \quad n)\ \lim_{x\to1} \frac{x\log x}{x^2-1}.$$

C. Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni:

$$a)\ \frac{x^7}{\log x}, \quad b)\ \frac{x\sin x + \cos x}{e^x}, \quad c)\ \sqrt[3]{x^2 + x + \log x}, \quad d)\ \log|\log x|;$$
$$e)\ 2^{x^3 + \sqrt{\log x}}, \quad f)\ \arctan\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad g)\ x^{xe^x}, \quad h)\ \log_x |3x|;$$
$$i)\ \arcsin(\arctan x), \quad l)\ e^{\sqrt{x^2+x}/\log x}, \quad m)\ \frac{\sin^2(|x|)}{\sqrt[4]{x^2+1}}, \quad n)\ \frac{(1+\log\sin x)^3}{\cos x \sin x}.$$

D. Studiare le seguenti funzioni (studiarne il dominio, il segno, eventuali asintoti orizzontali/verticali/obliqui, massimi e minimi relativi e disegnarne il grafico)

$$a)\ f(x) = \frac{|x+1|^3}{x^2}, \quad b)\ f(x) = \frac{x^2+x+2|x|}{x+1}, \quad c)\ f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}, \quad d)\ f(x) = x^3\left(\log|x| - \frac{1}{3}\right),$$
$$e)\ f(x) = \frac{x}{\log|x|}, \quad f)\ f(x) = e^{x - |x^2 - x - 2|}, \quad g)\ f(x) = xe^{1/\log x}, \quad h)\ f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$
$$i)\ f(x) = \sin x - x\cos x, \quad l)\ f(x) = \frac{|\tan x|}{\tan^2 x + 3}, \quad m)\ f(x) = (\sin x)^{\sin x}, \quad n)\ f(x) = \arcsin\left|e^{2x} - 1\right|.$$

E. Calcolare i seguenti integrali:

$$a) \int \sin^2(2x)dx, \quad b) \int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx, \quad c) \int \left(x^{\frac{5}{6}} + 2x^{-2} - 3x^{-1} + 2\right) dx, \quad d) \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx;$$

$$e) \int_0^1 x^2 \left(3x^3+1\right)^2 dx, \quad f) \int_{-1}^1 e^{-|x|}dx, \quad g) \int \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx, \quad h) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+(\log x)^2)};$$

$$i) \int_{-2}^0 (x^3+1)e^x dx, \quad l) \int_0^1 e^{-2x} \sin\left(e^{-x}\right) dx, \quad m) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx, \quad n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin x} \cos x dx.$$

F. Si considerino la funzioni

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}, \quad g(x) = xe^{\frac{1}{1-|x|}}, \quad h(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x+1}\right).$$

1. Studiare e rappresentare graficamente f, g, h;
2. determinare l'equazione della retta tangente ad $f(x)$ nel punto $x_0 = 5$;
3. calcolare l'area della regione del piano cartesiano compresa tra l'asse delle x e $h(x)$ nell'intervallo $[-3, -2]$.