ESERCITAZIONE DEL 7 OTTOBRE 2008 – SOLUZIONI

Corso di Matematica I per Geologia

A. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $x^2 + 4x - \frac{9}{4} \geq 0$;
2. $\frac{2x-3}{5-x^2} \geq 0$;
3. $\left|x^2 - 2\right| < x$;
4. $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{12-6x}{4-x^2} \geq 0$;
5. $|x+3| > \sqrt{x+3}$.

Soluzioni:

1. La funzione a sinistra del segno $\geq$ si annulla per i seguenti valori di x:

$$x_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16+9}}{2} \Rightarrow x_- = -\frac{9}{2},\ x_+ = \frac{1}{2}; \tag{1}$$

poiché $x^2 + 4x - \frac{9}{4}$ non è altro che l'equazione di una parabola rivolta verso l'alto, la disequazione sarà soddisfatta per $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

2. Innanzitutto notiamo che nei punti $x = \pm\sqrt{5}$ la parte sinistra della disequazione non è definita; dunque, questi punti non possono far parte dell'insieme delle soluzioni. Per soddisfare la disequazione dobbiamo considerare due possibilità:

$$(A) : \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 5 - x^2 > 0 \end{cases} \text{ oppure } (B) : \begin{cases} 2x - 3 \leq 0 \\ 5 - x^2 < 0 \end{cases}; \tag{2}$$

ciò equivale a dire che le soluzioni della disequazione iniziale sono date dall'*unione* delle soluzioni dei due sistemi, ognuno dei quali è risolto a sua volta dall'*intersezione* dell'insieme delle soluzioni della prima equazione con quello della seconda. Consideriamo prima il caso (A); le due disequazioni sono risolte dai seguenti valori di x:

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{dunque il sistema } (A) \text{ è soddisfatto per } x \in \left[\tfrac{3}{2}, \sqrt{5}\right). \tag{3}$$

Per soddisfare il sistema (B) dobbiamo avere

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, \infty\right) \end{cases} \quad \text{ovvero } x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right). \tag{4}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione iniziale è formato dall'unione delle soluzioni dei sistemi (A) e (B); dunque, la nostra disequazione è soddisfatta per

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \sqrt{5}\right). \tag{5}$$

3. Anche qui dobbiamo considerare due casi:

$$(A) : \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2 < x \end{cases} \quad \text{oppure } (B) : \begin{cases} x^2 - 2 < 0 \\ -x^2 + 2 < x \end{cases}. \tag{6}$$

Il sistema (A) è risolto dai seguenti valori di x:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right) \\ x \in (-1, 2) \end{cases} \Rightarrow x \in [\sqrt{2}, 2), \tag{7}$$

mentre per soddisfare (B) dobbiamo avere che

$$\begin{cases} x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \\ x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1); \tag{8}$$

in conclusione, la disequazione di partenza è risolta da

$$x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup [\sqrt{2}, 2). \tag{9}$$

4. Riscriviamo la disequazione nel seguente modo:

$$\frac{-2x^2 - x + 10}{4 - x^2} \geq 0; \tag{10}$$

notare che per $x = \pm\sqrt{2}$ la parte sinistra della disequazione non è definita. Possiamo procedere in modo concettualmente identico al punto 2; i due sistemi da studiare sono:

$$(A) : \begin{cases} -2x^2 - x + 10 \geq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} -2x^2 - x + 10 \leq 0 \\ 4 - x^2 < 0 \end{cases} . \tag{11}$$

Il sistema (A) è risolto dai seguenti valori di x,

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{5}{2}, 2\right] \\ x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \tag{12}$$

mentre per (B) abbiamo

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [2, +\infty) \\ x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [2, +\infty)\,; \tag{13}$$

la disequazione di partenza è risolta dall'unione delle soluzioni dei due sistemi, ovvero per

$$x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup [2, +\infty)\,. \tag{14}$$

5. Le soluzioni di questa disequazione vanno cercate tra i valori $x \geq -3$, dal momento che l'argomento della radice deve essere ≥ 0; notare che $x = -3$ non appartiene all'insieme delle soluzioni. Per $x > -3$ possiamo dividere parte destra e parte sinistra per $\sqrt{x+3}$ ed elevare tutto al quadrato; troviamo

$$x + 3 > 1, \text{ risolta da } x > -2. \tag{15}$$

B. Rappresentare graficamente sul piano cartesiano l'insieme dei punti (x, y) che verificano

$$|x| \leq |y|, \qquad |x| \leq 1, \, |y| \leq 1. \tag{16}$$

Soluzione:

Abbiamo quattro possibilità, tante quante sono le combinazioni dei segni di x e y; ad esempio, per $x \geq 0$, $y \geq 0$ la condizione diventa

$$x \leq y, \qquad 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1. \tag{17}$$

Disegniamo la retta $y = x$; i punti che verificano le relazioni (17) sono quelli che si trovano *sopra* tale retta, piu' quelli che appartengono alla retta. Lo stesso discorso può essere ripetuto per gli altri quadranti prendendo la retta $y = -x$ come riferimento; ad esempio, per $x < 0$, $y \geq 0$ la condizione diventa

$$-x \leq y, \qquad -1 \leq x < 0, \, , 0 \leq y \leq 1, \tag{18}$$

soddisfatta dai punti situati sopra la retta $y = -x$. Procedendo i modo analogo per i restanti due quadranti (quelli caratterizzati da $y < 0$) troviamo che l'insieme dei punti (x, y) che verificano (16) è la "clessidra" delimitata dalle rette $y = x$, $y = -x$, con $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.