**ESERCITAZIONE DEL 14 OTTOBRE 2008 – SOLUZIONI**

Corso di Matematica I per Geologia

## A.

Risolvere le seguenti disequazioni:

$$|\cos x| \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2}}; \tag{1}$$

$$|\cos x \sin x| \quad < \quad \frac{\cos 2x}{2}. \tag{2}$$

**Soluzione di (1)**

L'insieme delle soluzioni della disequazione (1) è formato dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$(A) : \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad (B) : \begin{cases} \cos x < 0 \\ -\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ovvero } \cos x > -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \tag{3}$$

Restringiamoci per il momento all'intervallo $[0, 2\pi]$; il sistema $(A)$ è soddisfatto da[1]

$$\begin{cases} x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] \\ x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right), \tag{4}$$

mentre per quanto riguarda $(B)$ abbiamo che

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \\ x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, 2\pi\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right); \tag{5}$$

quindi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la disequazione (1) è soddisfatta per

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right). \tag{6}$$

Le soluzioni in tutto $\mathbb{R}$ si ottengono semplicemente sommando $2\pi k$ per qualunque $k$ intero alle soluzioni della disequazione in $[0, 2\pi]$; dunque, l'insieme delle soluzioni è dato da:

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3}{4}\pi + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi + 2\pi k, \frac{7}{4}\pi + 2\pi k\right). \tag{7}$$

[1] Basta guardare il grafico della funzione coseno tra 0 e $2\pi$ per rendersene conto, sapendo che $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{3}{4}\pi = \cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Soluzione di (2)**

Come prima cosa, notiamo che affinché $x$ soddisfi la (2) è necessario che

$$\cos 2x > 0; \tag{8}$$

$\cos 2x$ è una funzione periodica con periodo $\pi$, e nell'intervallo $[0, \pi]$ la condizione (8) è verificata per

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right). \tag{9}$$

Dopo di ciò, usando la ben nota identità $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ troviamo che il problema si riduce allo studio della disequazione

$$|\sin 2x| < \cos 2x; \tag{10}$$

per risolvere la (10) possiamo intraprendere due strade diverse.

**Prima strada** Se dividiamo a destra e a sinistra del simbolo $<$ per $\cos 2x$ (il verso della disequazione rimane sempre lo stesso, dal momento che $\cos 2x > 0$) la disequazione diventa

$$\left|\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right| = |\tan 2x| < 1; \tag{11}$$

dunque ci siamo ridotti allo studio dei seguenti sistemi, questa volta formati da tre disequazioni ciascuno:

$$(A) : \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \tan 2x \geq 0 \\ \tan 2x < 1 \end{cases}, \quad (B) : \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \tan 2x < 0 \\ \tan 2x > -1 \end{cases}. \tag{12}$$

I sistemi $(A)$, $(B)$ possono essere facilmente risolti nell'intervallo $[0, \pi]$ (notare che tutte le funzioni in gioco sono periodiche di periodo $\pi$) tenendo bene in mente i grafici delle funzioni $\cos 2x$, $\tan 2x$, e il fatto che $\tan \frac{\pi}{4} = \tan \frac{3}{4}\pi = 1$, $\tan \frac{5}{4}\pi = \tan \frac{7}{4}\pi = -1$; gli insiemi delle soluzioni tra $[0, \pi]$ dei sistemi $(A)$, $(B)$ (che chiamiamo rispettivamente $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$) sono i seguenti:

$$\mathcal{S}_A = \left(0, \frac{\pi}{8}\right) \tag{13}$$

$$\mathcal{S}_B = \left(\frac{7}{8}\pi, \pi\right), \tag{14}$$

dunque, tra 0 e $\pi$ la disequazione (2) è soddisfatta da

$$x \in \mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B = \left(0, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}\pi, \pi\right). \tag{15}$$

Infine, se vogliamo sapere quali sono i valori di $x$ appartenenti a tutto $\mathbb{R}$ che verificano la disequazione (2) dobbiamo semplicemente considerare l'unione di tutti quegli insiemi che si ottengono sommando la quantità $\pi k$, $k$ intero, ai punti appartenenti a $\mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B$; quindi, in $\mathbb{R}$ la (2) è risolta da

$$x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right) \cup \left(\frac{7}{8}\pi + k\pi, \pi + k\pi\right). \tag{16}$$

**Seconda strada** La (10) è equivalente a questo sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \sin^2(2x) < \cos^2(2x) \\ \cos 2x > 0 \end{cases}, \tag{17}$$

che facendo uso dell'identità $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)$ diventa

$$\begin{cases} \cos 4x > 0 \\ \cos 2x > 0 \end{cases}; \tag{18}$$

quindi, le soluzioni del sistema in $[0, \pi]$ sono le seguenti:

$$\begin{cases} x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{8}\pi, \pi\right) \\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}\pi, \pi\right). \tag{19}$$

## B.

Determinare l'insieme di definizione di

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(e^x)}} \tag{20}$$

### Soluzione

I punti $x$ per i quali la funzione $f(x)$ è ben definita sono quelli che verificano la condizione

$$\sin(e^x) > 0. \tag{21}$$

La condizione (21) è soddisfatta solo ed esclusivamente dai valori $x$ tali che

$$e^x \in (0,\pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi)... \Rightarrow e^x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)\,, \tag{22}$$

ovvero da

$$x \in (-\infty, \ln \pi) \cup (\ln 2\pi, \ln 3\pi) \cup (\ln 4\pi, \ln 5\pi) \ldots \Rightarrow x \in (-\infty, \ln \pi) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\ln(2k\pi), \ln((2k+1)\pi))\,. \tag{23}$$

## C.

Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \tag{24}$$

1. Qual'è l'insieme di definizione di $f(x)$?
2. $f(x)$ è invertibile in tutto il suo insieme di definizione? Motivare la risposta.
3. Calcolare $f^{-1}$ scegliendo un opportuno sottoinsieme dell' insieme di definizione di $f$; specificare l'insieme di definizione di $f^{-1}$.

### Soluzione

1. La funzione $f(x)$ è definita per tutti i punti $x$ tali che $x^2 - 1 \geq 0$, ovvero per
$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \tag{25}$$
2. $f$ *non* è invertibile in tutto $\mathbb{R}$, dal momento che per ogni $y \in [0, +\infty)$ esistono due $x$ tali che $y = f(x)$ (vedere figura 1); in altre parole, $f(x)$ non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra dominio e codominio.
3. Prendiamo ad esempio $x \in [1, +\infty)$; adesso $f(x)$ è una corrispondenza biunivoca, perché in questo sottoinsieme del dominio la funzione è strettamente crescente. Se $y \in [0, +\infty)$ possiamo calcolare $f^{-1}(y)$ risolvendo l'equazione $y = \sqrt{x^2 - 1}$ rispetto ad $x$; non sorprendentemente l'equazione ammette due soluzioni, ovvero $x = \pm\sqrt{y^2 + 1}$. La soluzione positiva (vedere figura 2) é l'inversa di $f(x)$ per $x \in [1, +\infty)$, mentre quella negativa corrisponde ai valori $x \in (-\infty, -1]$.

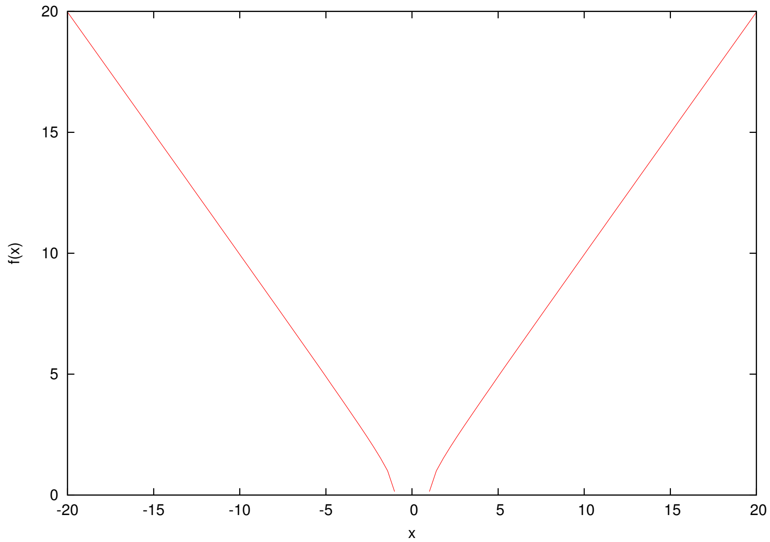


Figura 1: Andamento di $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

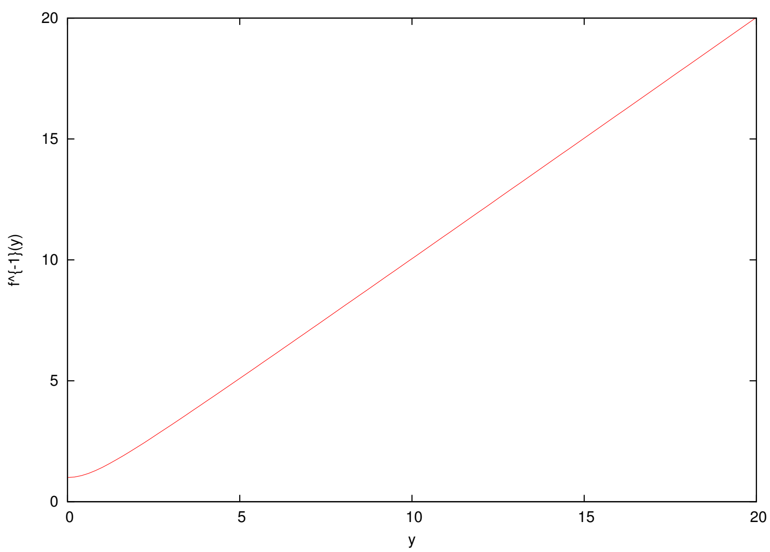


Figura 2: Andamento di $f^{-1}(y) = \sqrt{y^2 + 1}$, per $x \in [1, +\infty)$.