ESERCITAZIONE DEL 21 OTTOBRE 2008
Corso di Matematica I per Geologia

I. ESERCIZI SVOLTI IN CLASSE

A. Determinare la parte immaginaria, la parte reale ed il modulo di

$$z = \frac{1-2i}{(i+1)^2} + \frac{i+5}{4i}.$$

Dopodiché, rappresentare graficamente z sul piano complesso e scrivere z in forma trigonometrica.

Soluzione. Dobbiamo scrivere z nella forma $a + ib$. Sviluppiamo il quadrato al denominatore, usando che $i^2 = -1$:

$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i - 1 = 2i; \tag{1}$$

dunque,

$$z = \frac{1-2i}{2i} + \frac{i+5}{4i} = \frac{7-3i}{4i}. \tag{2}$$

Moltiplicando numeratore e a denominatore per $-i$ troviamo (ricordando che $(-i) \cdot i = 1$):

$$z = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4}i; \tag{3}$$

la (3) ci dice che

$$\mathrm{Re}\,(z) = -\frac{3}{4},\ \mathrm{Im}\,(z) = -\frac{7}{4} \Rightarrow |z| = \sqrt{[\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2} = \sqrt{\frac{29}{8}}. \tag{4}$$

Quindi z puó essere rappresentato graficamente nel piano complesso come il punto di coordinate $(x, y) = (-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4})$, che appartiene al terzo quadrante.

Infine, scrivere z in forma trigonometrica significa trovare θ e ρ tali che $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$; nel nostro caso

$$\rho = |z| = \sqrt{\frac{29}{8}} \tag{5}$$

$$\theta = \mathrm{arg} z = \pi + \arctan(7/3)\ , \tag{6}$$

dove nella seconda equazione abbiamo usato che z appartiene al terzo quadrante e $\frac{\mathrm{Im} z}{\mathrm{Re} z} = \tan\theta$.

B. Calcolare la parte reale di $z = (\sqrt{3}i - 1)^5$.

Soluzione. Per calcolare la parte reale di z, iniziamo a scrivere $\sqrt{3}i - 1$ in forma trigonometrica: $\sqrt{3}i - 1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$; in tal modo, usando la formula di De Moivre, possiamo riscrivere

$$z = \Big[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\Big]^5 = \rho^5\big(\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)\big) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}z = \rho^5\cos(5\theta)\ . \tag{7}$$

Nel nostro caso $\rho = |z| = \sqrt{3+1} = 2$ e $\theta = \arg\{-1 + i\sqrt{3}\} = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$, dove abbiamo usato che z appartiene al secondo quadrante del piano complesso (e quindi il suo argomento è uguale a π piú l'arcotangente di $\mathrm{Im}z/\mathrm{Re}z$).

Usando la (7) troviamo

$$\mathrm{Re}z = 2^5\cos\big(\frac{10\pi}{3}\big) = 2^5\big(-\frac{1}{2}\big) = -16\ . \tag{8}$$

C. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare:

1. le coordinate del versore $\hat{w}$ con la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{w}$;
2. la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$;
3. il coseno dell'angolo φ tra i vettori $\vec{v} + \vec{w}$ e $-\vec{w}$;
4. l'area del parallelogramma di vertici $\vec{0}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$.

Soluzione.

1. Il versore $\hat{w}$ è uguale a $\hat{w} = (\frac{1}{|\vec{w}|})\vec{w}$, con

   $$|\vec{w}| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}\ .$$

   Quindi, in coordinate, possiamo scrivere

   $$\hat{w} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

2. La proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ è uguale (per definizione) a $\vec{v} \cdot \hat{w}$, con

   $$\vec{v} \cdot \hat{w} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 3 \cdot (-\frac{2}{\sqrt{5}}) + 1 \cdot 0 = \frac{8}{\sqrt{5}}\ .$$

   Il valore assoluto di tale proiezione ($8/\sqrt{5}$) corrisponde alla lunghezza della proiezione del segmento orientato $\vec{v}$ sulla direzione $\hat{w}$; il suo segno (+) indica se il verso della proiezione del segmento orientato $\vec{v}$ coincide con quello di $\hat{w}$ oppure no (in questo caso, dato che il segno è positivo, il verso coincide).

3. Per calcolare il coseno di φ possiamo usare che

$$(\vec{v}+\vec{w}) \cdot (-\vec{w}) = |\vec{v}+\vec{w}| \cdot |\vec{w}| \cos\varphi$$

Usando che

$$(\vec{v}+\vec{w}) \cdot (-\vec{w}) = (2+1) \cdot (-1) + (-3-2) \cdot (+2) + (1+0) \cdot 0 = -13$$

e che $|\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{3^2+5^2+1} = \sqrt{35}$, troviamo:

$$-13 = 5\sqrt{7}\cos\varphi\ ,$$

ovvero $\varphi = \arccos(-\frac{13}{5\sqrt{7}})$.

4. L'area A del parallelogramma si pu "o calcolare come $A = |\vec{v} \times \vec{w}|$, dove

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi $A = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.