ESERCITAZIONE DEL 4 NOVEMBRE 2008 – SOLUZIONI

Corso di Matematica I per Geologia

A. Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ tale che[1]:

1. $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$, $|\mathbf{y}| = 3$ (Notazione: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ = "**a** è ortogonale a **b**");
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, $|\mathbf{y}| = 10$;
3. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{2}$, $|\mathbf{y}| = 2$;
4. $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$, $|\mathbf{y}| = \frac{2}{\sqrt{10}}$.

Soluzione.

1. Se $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la condizione $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ implica che $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$; dunque, $y_1 = 3y_2$. Quindi, i vettori $\mathbf{y}$ ortogonali ad $\mathbf{x}$ hanno la forma $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$; a noi interessano solo quelli con $|\mathbf{y}| = 3$, ovvero tali che
$$\sqrt{9y_2^2 + y_2^2} = 3, \quad \Rightarrow y_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}. \tag{1}$$
In conclusione, i vettori che cerchiamo sono:
$$\mathbf{y}_- = \begin{pmatrix} -\frac{9}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_+ = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$
2. In generale $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\alpha$, dove α è l'angolo compreso tra i due vettori; la condizione $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ ci permette di dire che i due vettori devono essere paralleli ($\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$), ovvero $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ con $\lambda > 0$ (se λ fosse negativo i vettori sarebbero *anti*paralleli). Possiamo fissare la costante λ sfruttando la condizione sul modulo di $\mathbf{y}$: $|\mathbf{y}| = 10 \Rightarrow \sqrt{\lambda^2 + 9\lambda^2} = 10 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{10}$; dunque, $\lambda = \sqrt{10}$ (i vettori devono essere paralleli).
3. Il procedimento da seguire è esattamente lo stesso usato per risolvere il punto 1; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -y_1 + 3y_2 = -2 \Rightarrow y_1 = 3y_2 + 2$, e $|\mathbf{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{(3y_2 + 2)^2 + y_2^2} = 2 \Rightarrow y_2 = 0, -\frac{6}{5}$. Quindi, i vettori che cerchiamo sono:
$$\mathbf{y}_- = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$
4. Chiamiamo α l'angolo tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; se $\alpha = \frac{\pi}{3}$,
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\alpha = \frac{1}{2}|\mathbf{x}||\mathbf{y}| = 1 \quad (\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2},\ |\mathbf{x} = \sqrt{10}|, \text{ e } |\mathbf{y}| = \tfrac{2}{\sqrt{10}} \text{ per ipotesi}). \tag{4}$$
Dal momento che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = -y_1 + 3y_2$, la (4) ci dice che $y_1 = 3y_2 - 1$; la condizione sul modulo di $\mathbf{y}$ ci permette di fissare y_2, infatti

[1] Ogni punto corrisponde ad un vettore diverso!

$$|\mathbf{y}| = |(3y_2 - 1)^2 + y_2^2| = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow y_2 = \frac{3}{10} \pm \frac{3}{\sqrt{10}}, \tag{5}$$

dunque i vettori che soddisfano le condizioni che abbiamo imposto sono:

$$\mathbf{y}_- = \begin{pmatrix} \frac{-1-3\sqrt{3}}{10} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_+ = \begin{pmatrix} \frac{-1+3\sqrt{3}}{10} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{10} \end{pmatrix}.$$

B. Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Calcolare:

1. l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $-\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $-\mathbf{x} - \mathbf{y}$;
2. l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Soluzione.

1. L'area A del parallelogramma in questione è pari al modulo del prodotto vettoriale tra $-\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$: $A = |-\mathbf{x} \times -\mathbf{y}| = |\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \sin\alpha$, se α è l'angolo compreso tra i due vettori. Notiamo che nel nostro caso $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, dunque i due vettori formano un angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$; quindi, poiché $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, l'area vale $A = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| = 5$ ($|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = \sqrt{5}$). Il nostro parallelogramma non è altro che un quadrato di lato $|\mathbf{x}|$.
2. È facile rendersi conto che l'area di questo triangolo è uguale alla metà dell'area del quadrato che ha per vertici i punti $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, il quale ha la stessa area del quadrato incontrato al punto precedente; quindi, l'area del triangolo in questione è pari a $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

1. calcolare $A + B^T$;
2. calcolare AB, BA.

Soluzione.

1. La matrice B^T ("B trasposta") si ottiene scambiando le righe con le colonne di B; la prima riga di B diventa la prima colonna di B^T, la seconda riga di B diventa la seconda colonna di B^T ecc. Quindi,

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

l'elemento $(A + B^T)_{i,j}$ della matrice $A + B^T$, posizionato sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna, è uguale a $A_{i,j} + (B^T)_{i,j}$; dunque,

$$A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2. Il prodotto tra due matrici è una operazione *non commutativa*, ovvero in generale AB non è uguale a BA. Calcoliamo AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

analogamente, la matrice BA è uguale a:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

D. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

1. calcolare A^T e $\det A$;
2. dato $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ calcolare $A\mathbf{v}$;
3. calcolare A^{-1} e verificare che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
4. calcolare $\det A^4$.

Soluzione.

1. Come abbiamo visto nella soluzione dell'esercizio precedente, la matrice A^T si ottiene scambiando le righe con le colonne di A; in questo caso si trova $A^T = A$. Il determinante di una matrice 2×2 si calcola nel modo seguente:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc; \tag{10}$$

dunque, $\det A = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$.

2. $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Sia S una generica matrice 2×2; $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice inversa di S è data da $S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; infatti,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{(ad - cb)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad - cb)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Dunque, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Il teorema di Binet ci permette di risolvere con il minimo sforzo questo punto; infatti, questo teorema ci dice che date due generiche matrici B, C $\det BC = \det CB = \det B \det C$. Quindi, $\det A^4 = (\det A)^4$, e poiché $\det A = 1$ abbiamo che $\det A^4 = 1$.

E. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = 1 \\ 2x_2 + x_1 & = 2 \end{cases} ; \tag{12}$$

riscrivere il sistema nella forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

e, *invertendo la matrice* A, trovare il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ che soddisfa questa relazione.

Soluzione. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

il sistema (12) è equivalente a:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}; \tag{14}$$

possiamo risolvere l'equazione (14) moltiplicando a destra e a sinistra per $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$