ESERCITAZIONE DELL' 11 NOVEMBRE 2008 – SOLUZIONI

Corso di Matematica I per Geologia

A. Trovare i valori di $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la seguente disequazione:

$$\ln x + \frac{1}{|\ln x|} \geq 1. \tag{1}$$

Soluzione. Abbiamo due casi: per $x \in (0,1)$ si ha che $\ln x < 0$, e la disequazione da studiare è

$$\ln x - \frac{1}{\ln x} \geq 1, \tag{2}$$

mentre per $x \in (1,+\infty)$ la (1) diventa:

$$\ln + \frac{1}{\ln x} \geq 1. \tag{3}$$

1. $x \in (0,1)$. Moltiplicando a destra e a sinistra per $\ln x$ troviamo che il problema è equivalente allo studio di

$$(\ln x)^2 - \ln x - 1 \geq 0; \tag{4}$$

la (4) è risolta da

$$\ln x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow x \in \left[e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right], \tag{5}$$

e poiché x deve appartenere a $(0,1)$ l'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{D}_1 = \left(0, e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right). \tag{6}$$

2. $x \in (1,+\infty)$. Il problema è equivalente allo studio di

$$(\ln x)^2 - \ln x + 1 \geq 0, \tag{7}$$

ed è molto semplice rendersi conto che la (7) è soddisfatta da *qualunque* valore di $\ln x$, dunque in particolare da tutti i punti $x \in (1,+\infty) = \mathcal{D}_2$. Infatti, la funzione $f(y) = y^2 - y + 1$ non è altro che una parabola rivolta verso l'alto, e l'equazione $f(y) = 0$ non ha nessuna soluzione reale; dunque la parabola $f(y)$ non interseca mai l'asse delle y, il che implica che $f(y) > 0$ per ogni y.

In conclusione, la disequazione (1) è risolta per

$$x \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \left[e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, 1\right) \cup (1, +\infty]. \tag{8}$$

B. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(\sqrt[3]{x^2-1}); \tag{9}$$

dopo aver descritto l'andamento qualitativo di f se ne determini il dominio e si calcoli f^{-1} in un opportuno sottoinsieme dell'insieme di definizione.

Soluzione. Come prima cosa notiamo che

$$f(x) = \ln(\sqrt[3]{x^2-1}) = \ln\left(\left[x^2-1\right]^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(x^2-1); \tag{10}$$

quindi, la funzione $f(x)$ è definita per tutti i punti x tali che $x^2-1>0$, ovvero l'insieme di definizione $\mathcal{D}$ è dato da

$$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\,. \tag{11}$$

Per disegnare l'andamento qualitativo di $f(x)$ è sufficiente notare che se $x^2-1\to 0$, dunque se $x\to\pm 1$, si ha che $\ln x\to-\infty$, e inoltre che il logaritmo è una funzione strettamente crescente del suo argomento; vedere figura 1.

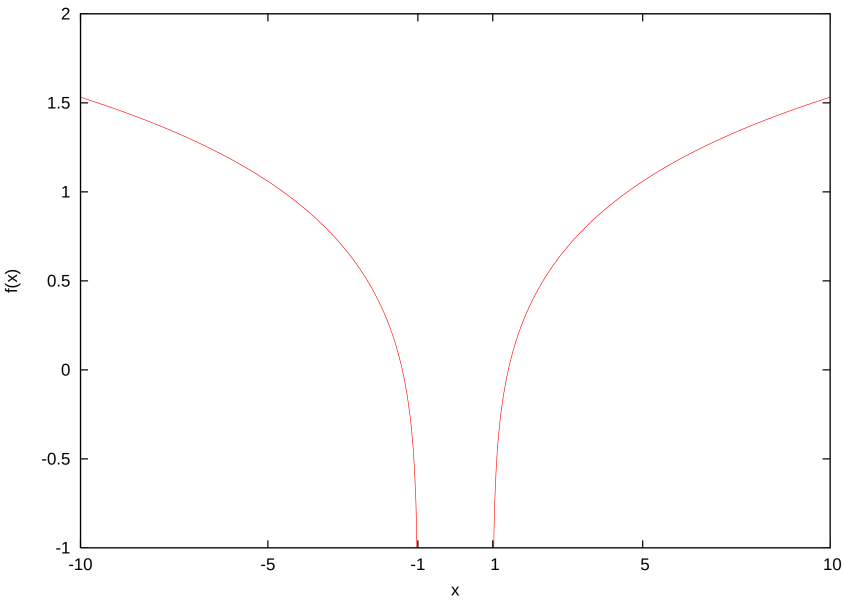

Figura 1: Andamento di $f(x)=\ln(\sqrt[3]{x^2-1})$.

Dal grafico di $f(x)$ è chiaro che la funzione *non è invertibile* su tutto $\mathbb{R}$, dal momento che per ogni valore di y esistono *due* x tali che $y=f(x)$; infatti,

$$y=\ln(\sqrt[3]{x^2-1}) \Rightarrow 3y=\ln(x^2-1) \Rightarrow e^{3y}=x^2-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{e^{3y}+1}. \tag{12}$$

La funzione $f_+^{-1}(y)=\sqrt{e^{3y}+1}$ è la funzione inversa di $f(x)$ in corrispondenza dei valori $x\in(1,+\infty)$, mentre $f_-^{-1}(y)=-\sqrt{e^{3y}+1}$ è l'inversa di $f(x)$ per $x\in(-\infty,-1)$.

C. Si consideri il numero complesso

$$z=\frac{(3+i)(1+i)}{1+2i}+i\sqrt{12}; \tag{13}$$

1. calcolare $\rho=|z|$ e $\theta=\arg z$, e scrivere z in forma trigonometrica;
2. calcolare z^8 usando la formula di De Moivre.

Soluzione. Per rispondere alle domande dobbiamo innanzitutto scrivere z nella forma $a + ib$;

$$z = \frac{2+4i}{1+2i} + i\sqrt{12} = \frac{(2+4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + i\sqrt{12} = \frac{10}{5} + i\sqrt{12} = 2 + i\sqrt{12}, \tag{14}$$

dunque

$$\rho = |z| = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} = \sqrt{4+12} = 4. \tag{15}$$

L'angolo $\theta = \arg z$ è definito dalla relazione

$$z = |z| \left(\cos\theta + i \sin\theta\right), \tag{16}$$

dunque paragonando la (14) con la (16) troviamo che θ deve risolvere due equazioni:

$$\begin{cases} |z|\cos\theta & = 2 \\ |z|\sin\theta & = \sqrt{12} \end{cases}, \tag{17}$$

con $|z| = 4$. La condizione $\cos\theta = \frac{1}{2}$ implica che $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$, mentre la seconda equazione che appare in (17) ci dice che $\sin\theta = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; dunque, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Infine, calcoliamo z^8. Grazie alla formula di De Moivre sappiamo che

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) \qquad (z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)), \tag{18}$$

dunque, poiché nel nostro caso $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$$z^8 = 4^8\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right) = 4^8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4^8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{15}(-1 + i\sqrt{3}). \tag{19}$$

D. Dato $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ determinare:

1. il vettore $\mathbf{w}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ di modulo 1 giacente sul piano xy;
2. la proiezione del vettore $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ su $\mathbf{v}$, e il coseno dell'angolo compreso tra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}$;
3. il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{k}$.

Soluzione.

1. Abbiamo tre condizioni da imporre e tre incognite da determinare, ovvero le tre componenti di $\mathbf{w} = (w_x\, w_y\, w_z)$. Se $\mathbf{w}$ appartiene al piano xy allora $w_z = 0$, e la condizione $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ ci dice che

$$w_x + 3w_y = 0 \Rightarrow w_x = -3w_y; \tag{20}$$

infine, $|\mathbf{w}| = 1$ implica che

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{9w_y^2 + w_y^2} = 1 \Rightarrow w_y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}. \tag{21}$$

Quindi, esistono due vettori che soddisfano le condizioni che abbiamo imposto, e sono dati da

$$\mathbf{w}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_- = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

2. Il vettore $\mathbf{p}$ che si ottiene proiettando $\mathbf{k}$ su $\mathbf{v}$ è un vettore che ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$, modulo pari a $|\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}|$ ($\hat{\mathbf{v}}$ è il versore associato a $\mathbf{v}$, dunque $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$), parallelo o antiparallelo a $\mathbf{v}$ a seconda che $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ sia rispettivamente maggiore o minore di 0. Poiché

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{14} && (23) \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} &= 2 > 0 && (24) \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} &= \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{14}} && (25) \end{aligned}$$

abbiamo che

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{v}, \qquad \text{con } \lambda > 0 \text{ e tale che } |\mathbf{p}| = |\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}| = \tfrac{2}{\sqrt{14}}; \tag{26}$$

quindi:

$$|\mathbf{p}| = |\lambda|\sqrt{14} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7} \quad (\lambda \text{ deve essere positivo}). \tag{27}$$

In conclusione, $\mathbf{p} = \frac{1}{7}\mathbf{v}$.

3. Chiamiamo $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ i versori relativi agli assi x, y, z del nostro sistema cartesiano tridimensionale; abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{k} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_x & v_y & v_z \\ k_x & k_y & k_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 8\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}. && (28) \end{aligned}$$

E. Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{cases}; \tag{29}$$

1. riscrivere il sistema nella forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
2. risolvere il sistema invertendo A, e verificare che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
3. trovare autovalori ed autovettori di A;
4. diagonalizzare A.

Soluzione.

1. Il sistema di partenza è equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

2. $\det A = -3 \neq 0$, dunque A può essere invertita; il vettore $\mathbf{x}$ che soddisfa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è dato da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \tag{31}$$

   con

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

3. Diciamo che $\mathbf{v}$ è l'autovettore di A associato all'autovalore λ se

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{33}$$

   dove I è la matrice identità dello stesso ordine di A; affinché la (33) non sia soddisfatta solo dalla soluzione banale $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ è necessario imporre che

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad \text{ovvero:} \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0. \tag{34}$$

   La (34) ha due soluzioni reali, date da

$$\lambda_+ = 3, \quad \lambda_- = -1; \tag{35}$$

   gli autovettori $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ corrispondenti risolvono le equazioni

$$A\mathbf{v}_+ = \lambda_+\mathbf{v}_+ = 3\mathbf{v}_+ \tag{36}$$

$$A\mathbf{v}_- = \lambda_-\mathbf{v}_- = -\mathbf{v}_-. \tag{37}$$

   Se chiamiamo $v_{+,1}$, $v_{+,2}$ le due componenti di $\mathbf{v}_+$ l'equazione (36) equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} v_{+,1} + 2v_{+,2} & = 3v_{+,1} \\ 2v_{+,1} + v_{+,2} & = 3v_{+,2} \end{cases}, \tag{38}$$

   ed entrambe le equazioni sono risolte da $v_{+,1} = v_{+,2}$. Quindi, il generico autovettore $\mathbf{v}_+$ corrispondente all'autovalore λ_+ ha la forma

$$\mathbf{v}_+ = \begin{pmatrix} v_{+,1} \\ v_{+,1} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

   dove $v_{+,1}$ è arbitrario; allo stesso modo troviamo che

$$\mathbf{v}_- = \begin{pmatrix} v_{-,1} \\ -v_{-,1} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

   con $v_{-,1}$ arbitrario.

4. Diagonalizzare A equivale a trovare una matrice S dello stesso ordine di A tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale. Consideriamo la matrice S che ha per prima colonna il vettore $\mathbf{v}_+$ e per seconda colonna il vettore $\mathbf{v}_-$ trovati al punto precedente, scegliendo per semplicità $v_{+,1} = v_{-,1} = 1$ (il risultato sarà indipendente dalla scelta di $v_{+,1}$, $v_{-,1}$); dunque,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

A questo punto è un semplice esercizio verificare che

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

dove 3 e -1 sono i due autovalori λ_+ e λ_- trovati al punto precedente. Si può arrivare alla stessa conclusione notando che

$$S\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_+ \tag{43}$$

$$S\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_- \qquad \text{dove} \quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

dunque

$$AS\mathbf{e}_1 = A\mathbf{v}_+ = \lambda_+\mathbf{v}_+ = \lambda_+S\mathbf{e}_1 \Rightarrow S^{-1}AS\mathbf{e}_1 = \lambda_+\mathbf{e}_1 \tag{45}$$

$$AS\mathbf{e}_2 = A\mathbf{v}_- = \lambda_-\mathbf{v}_- = \lambda_-S\mathbf{e}_2 \Rightarrow S^{-1}AS\mathbf{e}_2 = \lambda_-\mathbf{e}_2; \tag{46}$$

le (45), (46) implicano che $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$.