ESERCITAZIONE DEL 18 NOVEMBRE 2008 – SOLUZIONI
Corso di Matematica I per Geologia

A. Date le successioni $a_n = \sqrt{\frac{3n}{n^2-10}}$, $b_n = \frac{n^2+2n}{n+1}$ dimostrare *usando le definizioni* che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty.$$

Soluzione. Consideriamo la successione a_n; dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ equivale a dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che per $n > N$

$$-\varepsilon \leq a_n \leq \varepsilon. \tag{1}$$

La prima disuguaglianza è banalmente verificata, dal momento che $a_n \geq 0$ per ogni n; la seconda equivale a

$$\frac{3n}{n^2-10} \leq \varepsilon^2 \Leftrightarrow 3n \leq \varepsilon^2(n^2-10) \quad \text{(prendiamo } n \text{ intero} > 3\text{, che implica } n^2-10>0\text{)}. \tag{2}$$

La (2) è soddisfatta da

$$n \in (-\infty, n_-] \cup [n_+, +\infty), \quad n_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{9+40\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}, \tag{3}$$

dunque (1) è sicuramente vera se

$$n > N = \max\{3, n_+\} = \max\left\{3, \frac{3+\sqrt{9+40\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}\right\}. \tag{4}$$

Dimostriamo ora che $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$; dimostrare questa affermazione equivale a provare che per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che per $n > N$

$$\frac{n^2+2n}{n+1} \geq M, \tag{5}$$

che è equivalente a (siamo interessati ai valori positivi di n)

$$n^2 + n(2-M) - M \geq 0. \tag{6}$$

La (6) è soddisfatta da

$$n \in (-\infty, n_-) \cup (n_+, +\infty), \quad n_\pm = \frac{(M-2) \pm \sqrt{4+M^2}}{2}, \tag{7}$$

dunque la (5) è sicuramente vera se

$$n > N = n_+ = \frac{(M-2)+\sqrt{4+M^2}}{2}. \tag{8}$$

B. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+n^3}{(8n+3)(n^3-1)}, \quad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n}{n^{\frac{3}{2}}+1}, \quad c)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right),$$

$$d)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}+\sqrt{n^3+n}}{n^{\frac{3}{2}}+n}, \quad e)\ \lim_{n\to 1} \frac{1-n^2}{1-n}, \quad f)\ \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right).$$

Soluzione.

a) Sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$, e il rapporto di due infiniti dà luogo ad una forma indeterminata. Possiamo calcolare il limite notando che

$$\frac{n^4+n^3}{8n^4+3n^3-8n-3} = \frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^4\left(8+\frac{3}{8n}-\frac{8}{n^3}-\frac{3}{n^4}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(8+\frac{3}{8n}-\frac{8}{n^3}-\frac{3}{n^4}\right)}, \tag{9}$$

e se $\alpha > 0$ è facile verificare[1] che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \tag{11}$$

dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+n^3}{(8n+3)(n^3-1)} = \frac{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to+\infty}\left(8+\frac{3}{8n}-\frac{8}{n^3}-\frac{3}{n^4}\right)} = \frac{1}{8}. \tag{12}$$

b) Nonostante il limite $\lim_{n\to+\infty} \sin n$ non esista (la funzione seno oscilla tra -1 e 1) il limite della successione in questione esiste, dal momento che per $n > 0$

$$\frac{-1}{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \le \frac{n\sin n}{n^{\frac{3}{2}}+1} \le \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}; \tag{13}$$

grazie alla (11) sia il pezzo a sinistra che il pezzo a destra tendono a zero per $n \to +\infty$, dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n}{n^{\frac{3}{2}}+1} = 0. \tag{14}$$

c) Riscriviamo il termine n-esimo della successione nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} \\ &= \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)},\end{aligned} \tag{15}$$

dunque, poiché per $n \to +\infty$ $\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$, $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \to \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) = 0. \tag{16}$$

[1] Bisogna verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per $n > N$

$$-\varepsilon \le \frac{1}{n^\alpha} \le \varepsilon; \tag{10}$$

la prima disuguaglianza è banalmente vera se $n > 0$, mentre la seconda è soddisfatta da $n > N = \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$.

d) Ci troviamo di nuovo nella situazione in cui sia il numeratore che il denominatore tendono all'infinito, e il rapporto di due infiniti è in generale indeterminato; però, come abbiamo visto in precedenza, due quantità possono divergere mantenendo il loro rapporto finito. Riscriviamo il termine n-esimo della successione nel seguente modo:

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}+n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)}=\frac{n^{-\frac{5}{4}}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}, \tag{17}$$

dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}+n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-\frac{5}{4}}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=1. \tag{18}$$

e) Ci troviamo nel caso indeterminato $\frac{0}{0}$; ma poiché $(1-n^2)=(1+n)(1-n)$

$$\lim_{n\to1}\frac{1-n^2}{1-n}=\lim_{n\to1}\frac{(1+n)(1-n)}{(1-n)}=\lim_{n\to1}(1+n)=2. \tag{19}$$

f) Abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)} \tag{20}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=+\infty, \tag{21}$$

dal momento che per ogni $\alpha>0$ $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha=+\infty$, e $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$.