ESERCITAZIONE DEL 25 NOVEMBRE 2008 – SOLUZIONI

Corso di Matematica I per Geologia

A. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

1. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$, $\quad\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^n$, $\quad\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$;
2. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n-1)^n}$, $\quad\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\ln n}$;
3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$, $\quad\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{2}{n}$, $\quad\lim_{n\to+\infty} n^2-n^2\cos\frac{3}{n}$;
4. $\lim_{n\to+\infty} n^2\tan\frac{1}{n}$, $\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{10}+3n+1}{n+2e^n}$.

Soluzioni.

1. Data una qualunque successione a_n tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e; \tag{1}$$

usiamo questo risultato per calcolare il primo limite. Notiamo che

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\frac{n}{n^2}} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}; \tag{2}$$

ponendo $a_n = \frac{1}{n^2}$, e usando

$$\lim_{n\to+\infty} b_n^{c_n} = b^c \qquad \text{se } b_n>0,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b>0,\ \lim_{n\to+\infty} c_n = c, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \text{per ogni } a\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

la (1) ci dice che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{5}$$

Il secondo limite si calcola allo stesso modo; riscriviamo il termine n-esimo della successione come

$$\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^n = \left(\frac{n^3+1-1}{1+n^3}\right)^n = \left(1-\frac{1}{1+n^3}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{1+n^3}\right)^{(n^3+1)}\right]^{\frac{n}{n^3+1}}, \tag{6}$$

quindi, procedendo come per il caso precedente,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-1}\right)^{\frac{n}{n^3+1}} = 1. \tag{7}$$

Infine, per quanto riguarda l'ultimo limite:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\to_{n\to+\infty}0, \tag{8}$$

dal momento che se $|c|<1$ $\lim_{n\to+\infty}c^n=0$ e $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$.

2. Il primo limite si calcola col teorema dei carabinieri, poiché

$$1\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad \text{se } n\geq 2; \tag{9}$$

quindi $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$, dal momento che $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

Per calcolare il secondo limite riscriviamo il termine n-esimo della successione nel seguente modo:

$$\frac{n^n}{(n-1)^n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}, \tag{10}$$

quindi, grazie alla (1), $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n-1)^n}=e$.

L'ultimo limite si calcola il modo simile al primo, perché

$$\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{n\ln n}<\sqrt[n]{n^2}\ =\ \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}\qquad \text{se } n\geq 3, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}\ =\ 1, \tag{12}$$

dunque $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\ln n}=1$.

3. Notiamo che

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right], \tag{13}$$

dunque $\lim_{\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$, dal momento che $\ln e=1$.

Il secondo e il terzo limite possono essere calcolati riducendosi ai limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos a_n}{(a_n)^2}=\frac{1}{2},\qquad \text{se } a_n\to 0; \tag{14}$$

grazie alla (14) abbiamo che

$$n\sin\frac{2}{n}\ =\ 2\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\to_{n\to+\infty}2, \tag{15}$$

$$n^2-n^2\cos\frac{3}{n}\ =\ 9\frac{1-\cos\frac{3}{n}}{\left(\frac{3}{n}\right)^2}\to_{n\to+\infty}\frac{9}{2}. \tag{16}$$

4. Per calcolare il primo limite usiamo la definizione di tangente e la (14),

$$n^2 \tan \frac{1}{n} = n^2 \frac{\sin \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} = \frac{n}{\cos \frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to_{n\to+\infty} +\infty, \tag{17}$$

dal momento che $\lim_{n\to+\infty} \cos \frac{1}{n} = 1$.

L'ultimo limite si calcola sapendo che "l'esponenziale diverge più velocemente di qualunque potenza", ovvero che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0$ per ogni α;

$$\frac{n^{10} + 3n + 1}{n + 2e^n} = \frac{n^{10}}{e^n} \frac{\left(1 + 3n^{-9} + n^{-10}\right)}{(ne^{-n} + 2)} \to_{n\to+\infty} 0. \tag{18}$$