ESERCITAZIONE DEL 4 DICEMBRE 2008 – SOLUZIONI
Corso di Matematica I per Geologia

A. Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x}$, $\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x$;
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{1-\cos x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^2}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3 \cos x}$.

Soluzione.

1. *Primo limite.* Notiamo che

$$\frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{\log(1+2x)}{x}\frac{x}{\sin 3x}, \tag{1}$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x} = 2, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 3; \tag{2}$$

quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Secondo limite. Riscriviamo x^x come

$$x^x = e^{x\log x}, \tag{4}$$

e introduciamo il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$; abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{y\to +\infty} e^{\frac{1}{y}\log\frac{1}{y}} = \lim_{y\to +\infty} e^{-\frac{1}{y}\log y} = e^{-\lim_{y\to +\infty}\frac{\log y}{y}} = e^0 = 1. \tag{5}$$

Terzo limite. Questo limite può essere ricondotto al limite notevole che definisce il numero e, infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^x &= \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2+2}x} \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+2}\right]^{\frac{x}{x^2+2}},\end{aligned}$$

e sappiamo che

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+2} = e, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2+2} = 0; \tag{6}$$

in conclusione, grazie alla (6),

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+2}\right]^{\frac{x}{x^2+2}}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+2}\right]^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+2}}=e^0=1. \tag{7}$$

2. *Primo limite.* Riscriviamo l'argomento del limite nel seguente modo:

$$\frac{\tan x}{1-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{1-\cos x}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{x^2}{1-\cos x}\frac{1}{x}, \tag{8}$$

e poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty, \tag{9}$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{1-\cos x}=+\infty. \tag{10}$$

Secondo limite. Introducendo il cambio di variabile $y=a^x-1$ troviamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a\left([1+y]^{\frac{1}{y}}\right)}=\frac{1}{\log_a e}=\log a, \tag{11}$$

dal momento che $\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$ per ogni $x>0$, $a>0$.
Terzo limite. Introducendo il cambio di variabile $y=x-\frac{\pi}{2}$ troviamo che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^2}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right]^2}{(-y)^3\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}; \tag{12}$$

usando le identità

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \tag{13}$$

il limite di partenza diventa:

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)^2}{y^3\sin y}. \tag{14}$$

Questo limite può essere calcolato riscrivendo l'argomento nel seguente modo:

$$\frac{(1-\cos y)^2}{y^3\sin y}=\frac{(1-\cos y)^2}{y^4}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}, \tag{15}$$

dove $\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)}{y^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$; quindi,

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)^2}{y^3\sin y}=\frac{1}{4}. \tag{16}$$

B.

B. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^6, \qquad g(x) = \frac{x^2 + x^3}{1 + x^2}; \tag{17}$$

1. calcolare le derivate prime $f'(x)$, $g'(x)$,
2. determinare l'equazione della retta tangente a $f(x)$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione.

1. *Prima derivata.* Dobbiamo calcolare

$$\frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^6\right); \tag{18}$$

poiché in generale $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$, la (18) è uguale a

$$\frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}x^6, \tag{19}$$

e dunque, usando che $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}1 = 0$,

$$\frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^6\right) = 1 + 2x + 3x^2 + 6x^5. \tag{20}$$

Seconda derivata. Usando la proprietà

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{21}$$

troviamo che

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2 + x^3}{1 + x^2} = \frac{(2x + 3x^2)(1 + x^2) - (x^2 + x^3)2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(1 + x^2)^2}. \tag{22}$$

2. L'equazione $y(x)$ della retta tangente a $f(x)$ nel punto x_0 deve avere come coefficiente angolare la derivata di f nel punto x_0, e per $x = x_0$ $y(x_0) = f(x_0)$. È facile rendersi conto che la retta che soddisfa queste due proprietà ha equazione

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); \tag{23}$$

dunque, se $f(x)$ è data dalla (17) e $x_0 = 0$,

$$y(x) = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x - 1 \qquad (f'(0) = 1,\ f(0) = 1). \tag{24}$$