ESERCITAZIONE DELL' 11 DICEMBRE 2008 – SOLUZIONI

Corso di Matematica I per Geologia

A. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $\sin x \cos x$, $(\sin x)^3$, $e^{2x}(2\sin 3x - 4\cos 3x)$;
2. $\log |x|$, $\log\left(\left|\frac{x+2}{3-x}\right|\right)$, $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Soluzioni.

1. *Prima derivata.* Abbiamo che

$$\frac{d}{dx}\sin x\cos x = \sin x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}\sin x = -(\sin x)^2 + (\cos x)^2. \tag{1}$$

Seconda derivata. Date due funzioni $f(x)$, $g(x)$ sappiamo che

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x); \tag{2}$$

la funzione $(\sin x)^3$ è della forma $f(g(x))$ con $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$, dunque grazie alla (2):

$$\frac{d}{dx}(\sin x)^3 = 3(\sin x)^2\cos x. \tag{3}$$

Terza derivata. Poiché $\frac{d}{dx}f(ax) = af'(ax)$, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$,

$$\frac{d}{dx}e^{2x}(2\sin 3x - 4\cos 3x) = 2e^{2x}(2\sin 3x - 4\cos 3x) + e^{2x}(6\cos 3x + 12\sin 3x) = e^{2x}(16\sin 3x - 2\cos 3x). \tag{4}$$

2. *Prima derivata.*

$$\log|x| = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dx}\log|x| = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}, \tag{5}$$

dal momento che $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$.

Seconda derivata.

$$\log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = \begin{cases} \log\left(\frac{x+2}{3-x}\right) & \frac{x+2}{3-x} > 0 \\ \log\left(\frac{-x-2}{3-x}\right) & \frac{x+2}{3-x} < 0 \end{cases}; \tag{6}$$

per $\frac{x+2}{3-x} > 0$ abbiamo che

$$\frac{d}{dx}\log\left(\frac{x+2}{3-x}\right) = \left(\frac{3-x}{x+2}\right)\frac{d}{dx}\frac{x+2}{3-x} = \left(\frac{3-x}{x+2}\right)\frac{(3-x)+(x+2)}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)(x+2)}, \tag{7}$$

ed è facile rendersi conto che

$$\frac{d}{dx}\log\left(\frac{x+2}{3-x}\right) = \frac{d}{dx}\log\left(\frac{-x-2}{3-x}\right). \tag{8}$$

Terza derivata. La derivata dell'arcotangente è data da

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}; \tag{9}$$

dunque,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{2}{(1-x)^2} &= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

B. Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto x_0:

$$f(x) = \sin(8x^2),\ x_0 = 0, \qquad f(x) = e^{\frac{x+2}{x-3}},\ x_0 = 2.$$

Soluzione.

1. *Primo caso.* In generale, l'equazione $y(x)$ della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto $x = x_0$ è data da

$$y(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0); \tag{11}$$

se $f(x) = \sin(8x^2)$ e $x_0 = 0$ abbiamo che

$$y(x) = 0, \tag{12}$$

dal momento che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 16x\cos(8x^2)$, dunque $f'(0) = 0$.

2. *Secondo caso.* La derivata di $f(x)$ è data da

$$\frac{d}{dx}e^{\frac{x+2}{x-3}} = e^{\frac{x+2}{x-3}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = e^{\frac{x+2}{x-3}}\left(\frac{1\cdot(x-3)-1\cdot(x+2)}{(x-3)^2}\right) = e^{\frac{x+2}{x-3}}\frac{-5}{(x-3)^2}, \tag{13}$$

dunque $f'(2) = -5e^{-4}$; dal momento che $f(2) = e^{-4}$ la (11) ci dice che

$$y(x) = -5e^{-4}(x-2) + e^{-4}. \tag{14}$$

C. Studiare e rappresentare graficamente le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+2}, \qquad g(x) = xe^{-x^2}.$$

Soluzione.

1. *Studio di $f(x)$.*

   a) Come prima cosa notiamo che f è definita su tutti i punti reali diversi da -2; in $x = -2$ la funzione presenta un asintoto verticale, dal momento che

   $$\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{9}{x + 2} = \pm\infty. \tag{15}$$

   b)
   $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \lim_{x\to \pm\infty} x \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \pm\infty; \tag{16}$$

   più precisamente per $x \to \pm\infty$ la funzione presenta un asintoto obliquo con pendenza 1, dal momento che $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

   c) La curva $f(x)$ interseca l'asse delle x quando $f(x) = 0$, ovvero quando

   $$x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = x_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}; \tag{17}$$

   notare che i due punti si trovano a sinistra e a destra dell'asintoto verticale, dal momento che $x_+ > -2$, $x_- < -2$.

   d) La derivata di $f(x)$ è sempre positiva, ovvero $f(x)$ è strettamente crescente; infatti,

   $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(2x + 3)(x + 2) - (x^2 + 3x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x + 2)^2}, \tag{18}$$

   e il numeratore della (18) è sempre positivo.

   e) A questo abbiamo tutto ciò che ci serve per tracciare il grafico della funzione $f(x)$; vedere figura 1.

2. *Studio di $g(x)$.*

   a) L'insieme di definizione di $g(x)$ coincide con $\mathbb{R}$.

   b) Per $x \to \pm\infty$ la funzione $g(x)$ presenza un asintoto orizzontale $y = 0$, infatti:

   $$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0. \tag{19}$$

   c) La funzione $g(x)$ è strettamente positiva per $x > 0$, e strettamente negativa per $x < 0$; $g(x) = 0$ per $x = 0$.

   d) Studiamo il segno della derivata di $g(x)$;

   $$\frac{d}{dx} xe^{-x^2} = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}, \tag{20}$$

   dunque lo studio del segno di $g'(x)$ è equivalente allo studio del segno di $(1-2x^2)$, dal momento che $e^{-x^2} > 0$ per ogni x. Quindi, $g'(x) < 0$ per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, $g'(x) > 0$ per $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e $g'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

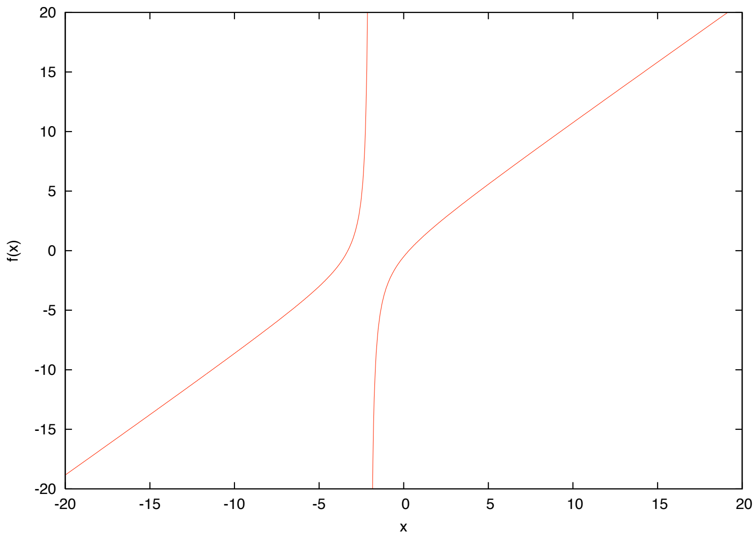

Figura 1: Andamento di $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+2}$.

Il punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è un massimo locale di $g(x)$, dal momento che per $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $g'(x) > 0$ ($g(x)$ *cresce*), mentre per $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ $g'(x) < 0$ ($g(x)$ *decresce*); al contrario, il punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ è un minimo locale di $g(x)$, perché per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $g'(x) < 0$ ($g(x)$ *decresce*), mentre per $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $g'(x) > 0$ ($g(x)$ *cresce*).

e) Per $x \to 0$ la funzione $g(x)$ va a zero linearmente, ovvero la retta tangente a $g(x)$ nel punto $x = 0$ ha equazione $y(x) = x$; questo discende dal fatto che $g(0) = 0$ e $g'(0) = 1$.

f) Infine, notiamo che $g(x) = -g(-x)$ (dunque ci bastava studiare $g(x)$ per x positivi).

e) Abbiamo tutto ciò che ci serve per disegnare il grafico di $g(x)$; vedere figura 2.

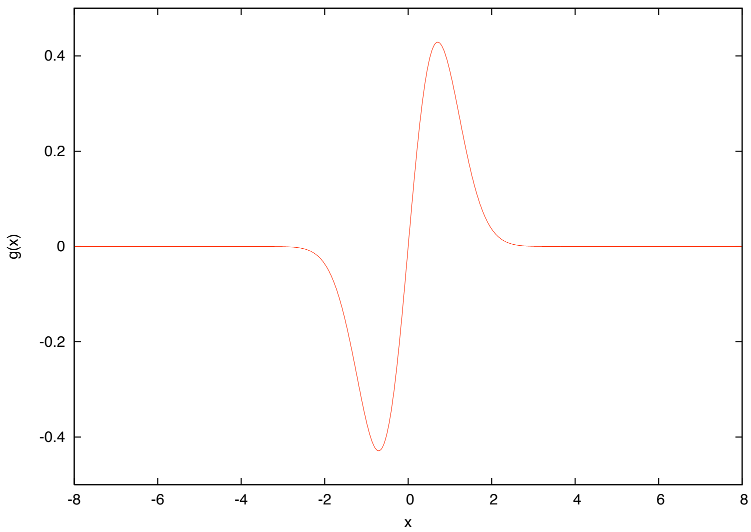

Figura 2: Andamento di $g(x) = xe^{-x^2}$.