PRIMO APPELLO – 26 GENNAIO 2009

• **Motivare il lavoro svolto**
• **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Calcolare $(\log_{\sqrt{2}} 4)^2 - 2\log_{\sqrt{2}} 4$.

   Soluzione. Usando che $4 = (\sqrt{2})^4$, si trova: $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4 = 4$, da cui $(\log_{\sqrt{2}} 4)^2 - 2\log_{\sqrt{2}} 4 = 16 - 8 = 8$.

2. Determinare le cinque radici complesse di $z^5 + z = 0$.

   Soluzione. Decomponendo $z^5 + z = z(z^4+1)$ si vede immediatamente che una radice è $z = 0$, e che le altre quattro sono le radici complesse di $z^4 = -1$. Dato che, in rappresentazione trigonometrica, $z_0 = -1$ ha modulo $= 1$ e angolo $= \pi$, le quattro radici di -1 hanno tutte modulo $= 1$ e angoli $= \pi/4 + (2k\pi)/4$, con $k = 0, 1, 2, 3$. In conclusione, le cinque radici richieste sono:

   $$z = 0, e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4} \; .$$

3. Calcolare la derivata di $f(x) = \big[\sin(x^2)\big]^2$.

   Soluzione. Usando la regola di derivazione delle funzioni composte si trova:

   $$f'(x) = 2\sin(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x \; .$$

4. Sia $f(x) = \begin{cases} x\log|x| & \text{se} \quad x \neq 0 \; , \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \; . \end{cases}$
   Si stabilisca se f è continua in $x = 0$.

   Soluzione. Perché f sia continua in $x = 0$, deve risultare: $\lim_{x\to 0} x\log|x| = 0$. D'altra parte:

   $$\lim_{x\to 0} x\log|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\log|x|}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0 \; ,$$

   e quindi la funzione assegnata è continua in $x = 0$.

5. Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $(1,-1)$, $(2,3)$, $(3,0)$, $(4,4)$.

   Soluzione. Chiamando $P_1 : (1,-1)$, $P_2 : (2,3)$, $P_3 : (4,4)$, $P_4 : (3,0)$, i quattro lati della figura sono associati ai vettori: $\vec{v}_1 = \overline{P_1P_2} = (1,4)$, $\vec{v}_2 = \overline{P_2P_3} = (2,1)$, $\vec{v}_3 = \overline{P_4P_3} = (1,4)$, $\vec{v}_4 = \overline{P_1P_4} = (2,1)$. Si osservi che $\vec{v}_1 = \vec{v}_3$ e $\vec{v}_2 = \vec{v}_4$, che vuol dire che il quadrilatero assegnato è effettivamente un parallelogramma. L'area della figura si può calcolare come:

   $$\text{Area} = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \Big|\det\begin{pmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\Big| = \Big|\begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix}\Big| = 7 \; .$$

6. Stabilire se $f(x) = x \arctan x$ è invertibile su tutto il suo dominio di definizione D. Se non lo è, determinare un sottoinsieme di D su cui f è invertibile.

   Soluzione. Si osservi innanzitutto che f è definita su tutto $\mathbb{R}$. Sicuramente non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, poiché f è pari ($f(x) = f(-x)$). Studiando il segno della derivata: $f'(x) = \arctan x + x/(1+x^2)$, si vede che $f' > 0$ su $\{x > 0\}$, e quindi f è crescente sul semiasse positivo. Di conseguenza f è invertibile su tale sottodominio.

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calcolare $\det A$ e la matrice inversa A^{-1}. Si verifichi che $A \cdot A^{-1} = I$.

   Soluzione. Si ha: $\det A = -2$ e $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. In effetti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} & 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 + 0 & 1 + 0 \end{pmatrix} = I \, .$$

2. Determinare il vettore $\vec{w}$ tale che $\vec{v} = A\vec{w}$.

   Soluzione. Il vettore richiesto è

$$\vec{w} = A^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \, .$$

3. Calcolare $\vec{v} \cdot (A\vec{v})$ e determinare il coseno dell'angolo tra $\vec{v}$ e $A\vec{v}$.

   Soluzione. Si ha: $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, e quindi:

$$\vec{v} \cdot (A\vec{v}) = (-2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \, .$$

   Usando che $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ e $|A\vec{v}| = 2$, troviamo che il coseno dell'angolo ϕ richiesto è:

$$\cos\phi = \frac{\vec{v} \cdot A\vec{v}}{|\vec{v}| \, |A\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \, .$$

4. Determinare un versore ortogonale ad $A^2\vec{v}$.

   Soluzione. Si ha: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, da cui: $A^2\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   È quindi evidente che un versore ortogonale a $A^2\vec{v}$ può essere scelto uguale a $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.
Sia $f(x) = \sqrt[3]{1+3x+x^2} - 1$.

1. Si calcoli lo sviluppo di Taylor del second'ordine in $x_0 = 0$ di $f(x)$.

   Soluzione. Si ha:
$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+3x+x^2)^{2/3}}(3+2x)\ ,$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{(1+3x+x^2)^{5/3}}(3+2x)^2 + \frac{2}{3}\frac{1}{(1+3x+x^2)^{2/3}}\ ,$$
   da cui $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -2 + 2/3 = -4/3$. Lo sviluppo richiesto è quindi:
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) = x - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\ .$$

2. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\sin x}\right)\ .$$

   Soluzione. Usando lo sviluppo ottenuto sopra e $\sin x = x + o(x^2)$, trovo:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - f(x)}{f(x)\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{2}{3}\ .$$

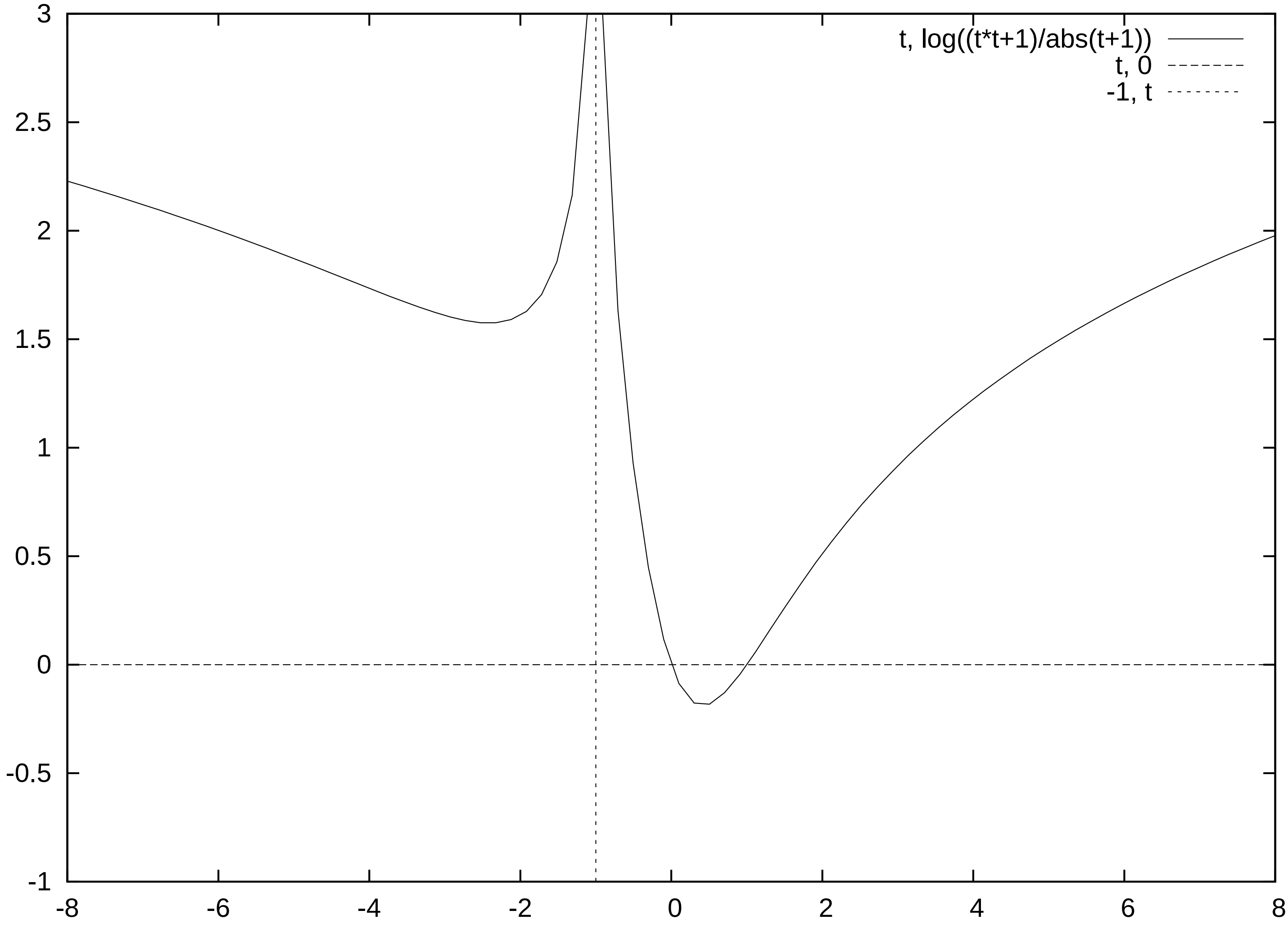
Esercizio 4.
Sia
$$f(x) = \log\left(\frac{x^2+1}{|x+1|}\right) .$$
Si studi $f(x)$ (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.

Soluzione. Il dominio della funzione è $\{x \neq -1\}$. Per lo studio del segno, notiamo che, sul dominio, $f \geq 0 \iff (x^2+1)/|x+1| \geq 1$, ovvero
$$|x+1| \leq x^2+1 \iff -(x^2+1) \leq x+1 \leq x^2+1 \iff \{x^2+x+2 \geq 0\} \cup \{x^2 - x \geq 0\} .$$
Nell'ultima espressione, si noti che $x^2+x+2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mentre $\{x^2 - x \geq 0\} \iff \{x \geq 1\} \cup \{x \leq 0\}$.
In conclusione, la funzione assegnata è: positiva in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, \infty)$, negativa in $(0, 1)$, e nulla in $x = 0, 1$.
Ai bordi del dominio di definizione si ha: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$. Quindi la funzione ammette un asintoto verticale in $x = -1$.
Per determinare massimi/minimi e le regioni in cui f cresce/decresce, studiamo il segno della derivata:
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x^2+1)(x+1)} .$$
La derivata è quindi positiva in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$, negativa in $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1, -1+\sqrt{2})$ e nulla in $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Quindi $f(x)$:

1. è strettamente decrescente tra $-\infty$ e $-1-\sqrt{2}$;
2. ha un minimo relativo in $-1-\sqrt{2}$, dove assume il valore $f(-1-\sqrt{2}) = \log(2\sqrt{2}+2) > 0$;
3. è strettamente crescente tra $-1-\sqrt{2}$ e -1, dove ha l'asintoto verticale;
4. è strettamente decrescente tra -1 e $-1+\sqrt{2}$, dove assume il valore $f(-1+\sqrt{2}) = \log(2\sqrt{2}-2) < 0$;
5. è strettamente crescente per $x > -1+\sqrt{2}$.

Di conseguenza la funzione assegnata non assume massimo assoluto (poiché tende a $+\infty$ ai bordi del dominio di definizione) e ammette $\log(2\sqrt{2}-2)$ come minimo assoluto (che è assunto nel punto $x = -1+\sqrt{2}$).

Il grafico risultante è riportato in figura.


t, log((t*t+1)/abs(t+1))
t, 0
-1, t
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

Esercizio 5.

1. Calcolare
$$\int_{-5}^{-3} \frac{x+3}{x^2-4}\ .$$

   Soluzione. La funzione integranda si può riscrivere come segue:
$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\ ,$$
   con A e B scelti in modo tale che
$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4} = \frac{x+3}{x^2-4}\ ,$$
   da cui: $A+B=1$, $A-B=3/2$, ovvero $A=5/4$ e $B=-1/4$. L'integrale richiesto è quindi:
$$\int_{-1}^{1} \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} = \left[\frac{5}{4}\log|x-2| - \frac{1}{4}\log|x+2|\right]_{-5}^{-3} = \left[\frac{5}{4}\log 5 - \frac{5}{4}\log 7 + \frac{1}{4}\log 3\right]\ .$$

2. Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{(\tan\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx\ .$$

   Soluzione. Con la sostituzione $t=\sqrt{x}$ (che implica $dt = dx/(2\sqrt{x})$), posso riscrivere l'integrale assegnato nella forma:
$$\int_0^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{(\tan\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^2\,dt\ .$$
   Usando che $(\tan t)^2 = -1 + \left[1+(\tan t)^2\right] = -1 + \left[\tan t\right]'$, troviamo:
$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^2\,dt = 2\Big[-t+\tan t\Big]_0^{\pi/4} = 2\Big[-\frac{\pi}{4}+1\Big]\ ,$$
   che è quindi il valore dell'integrale richiesto.