PRIMO ESONERO – 13 NOVEMBRE 2008

• **Motivare il lavoro svolto**
• **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande (2 punti a domanda).

1. Si determini l'insieme di definizione di $f(x) = \sqrt{\frac{e^{-x}}{\cos x}}$.

   Soluzione. La funzione f è definita sulla regione D in cui $e^{-x}/\cos x \geq 0$ e $\cos x \neq 0$, ossia la regione D in cui $\cos x > 0$. Si ha quindi
$$D = \{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ , \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

2. Calcolare $\log_9 \sqrt{3}$.

   Soluzione. Usando che $\sqrt{3} = 9^{1/4}$ si trova $\log_9 \sqrt{3} = \log_9 9^{1/4} = 1/4$.

3. Risolvere la disequazione $8^{x+2} \geq 2^{x^2}$.

   Soluzione. Riscrivendo $8 = 2^3$, si vede che la disequezione assegnata è equivalente a $2^{3(x+2)} \geq 2^{x^2}$ $\Leftrightarrow 3(x+2) \geq x^2 \Leftrightarrow x_- \leq x \leq x_+$, dove $x_\pm$ sono le radici dell'equazione $x^2 - 3(x+2) = 0$. Si trova:
$$x_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{2}$$
   e quindi la disuguaglianza assegnata è risolta per
$$\frac{3-\sqrt{33}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{33}}{2} \ .$$

4. Trovare le radici complesse dell'equazione $z^2 + z + 1 = 0$.

   Soluzione. Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado troviamo
$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow z = z_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

5. Si calcoli l'angolo tra i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

   Soluzione. Il prodotto scalare tra i due vettori assegnati è $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot \sqrt{2} = 0$, quindi $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali. In altre parole l'angolo tra i due vettori è $\theta = \pi/2$.

6. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcoli $A^2 + 3I$.

   Soluzione.
$$A^2 + 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Esercizio 2.

Sia $z = \frac{1-i}{1+i}$.

1. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z.
2. Calcolare il modulo $\rho = |z|$ e l'argomento $\theta = \arg z$, e riscrivere z in forma trigonometrica.
3. Calcolare la parte reale di $z^{100} - z^2$.

Soluzione.

1. Moltiplicando e dividendo per $(1-i)$ troviamo:

$$z = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$$

   e quindi si ha Rez=0, Im$z = -1$.

2. Si ha: $|z| = |-i| = 1$ e θ l'angolo tale che $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = -1$, ovvero $\theta = 3\pi/2$. Possiamo quindi riscrivere:

$$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \ .$$

3. Si ha:

$$z^{100} - z^2 = (-i)^1 00 - (-i)^2 = (-1)^{50} - (-1) = 1 + 1 = 2$$

   e quindi Re$(z^{100} - z^2) = 2$.

Esercizio 3.

Sia

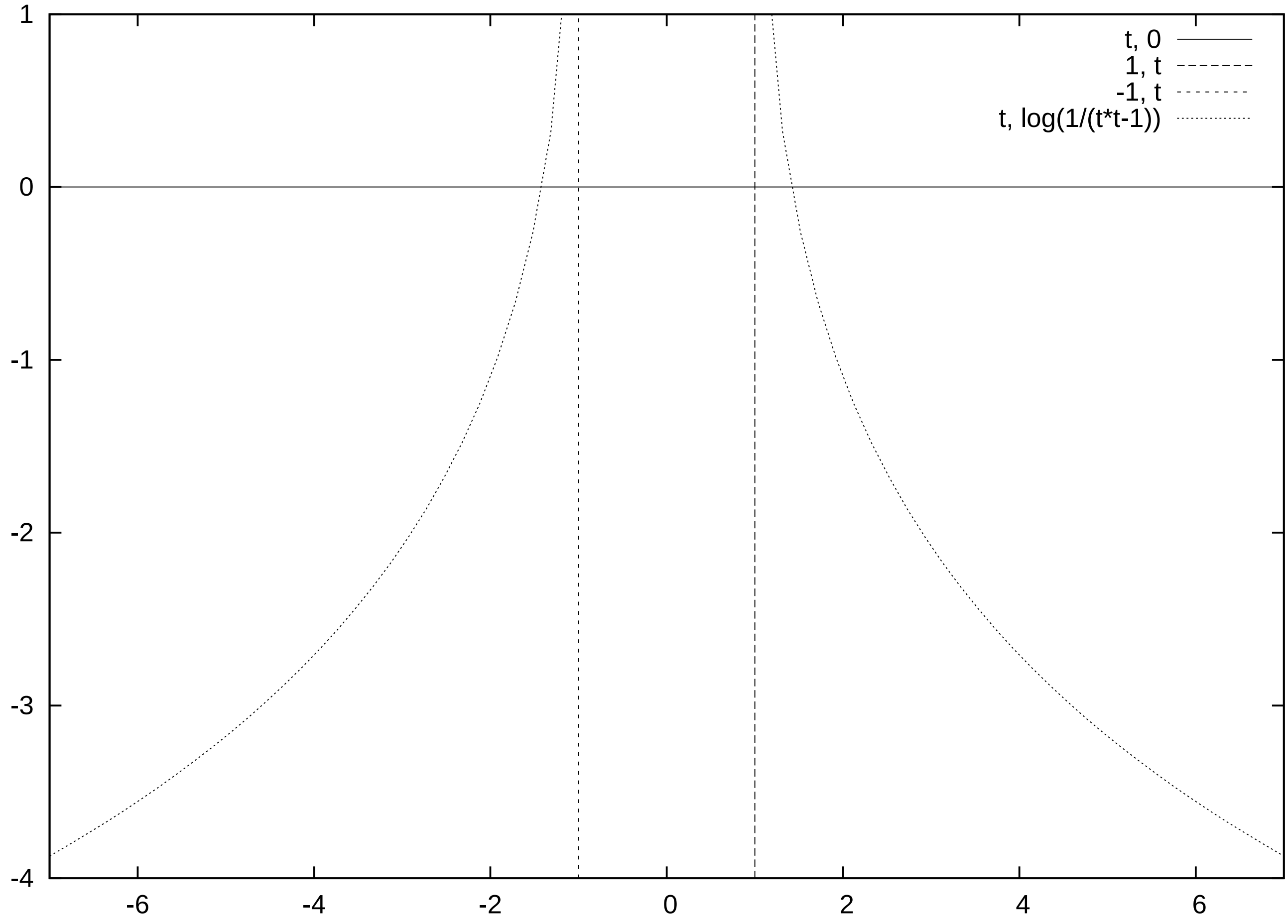
$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2-1}\right).$$

1. Si determini l'insieme D di definizione di f. Disegnare qualitativamente il grafico di $y = f(x)$.

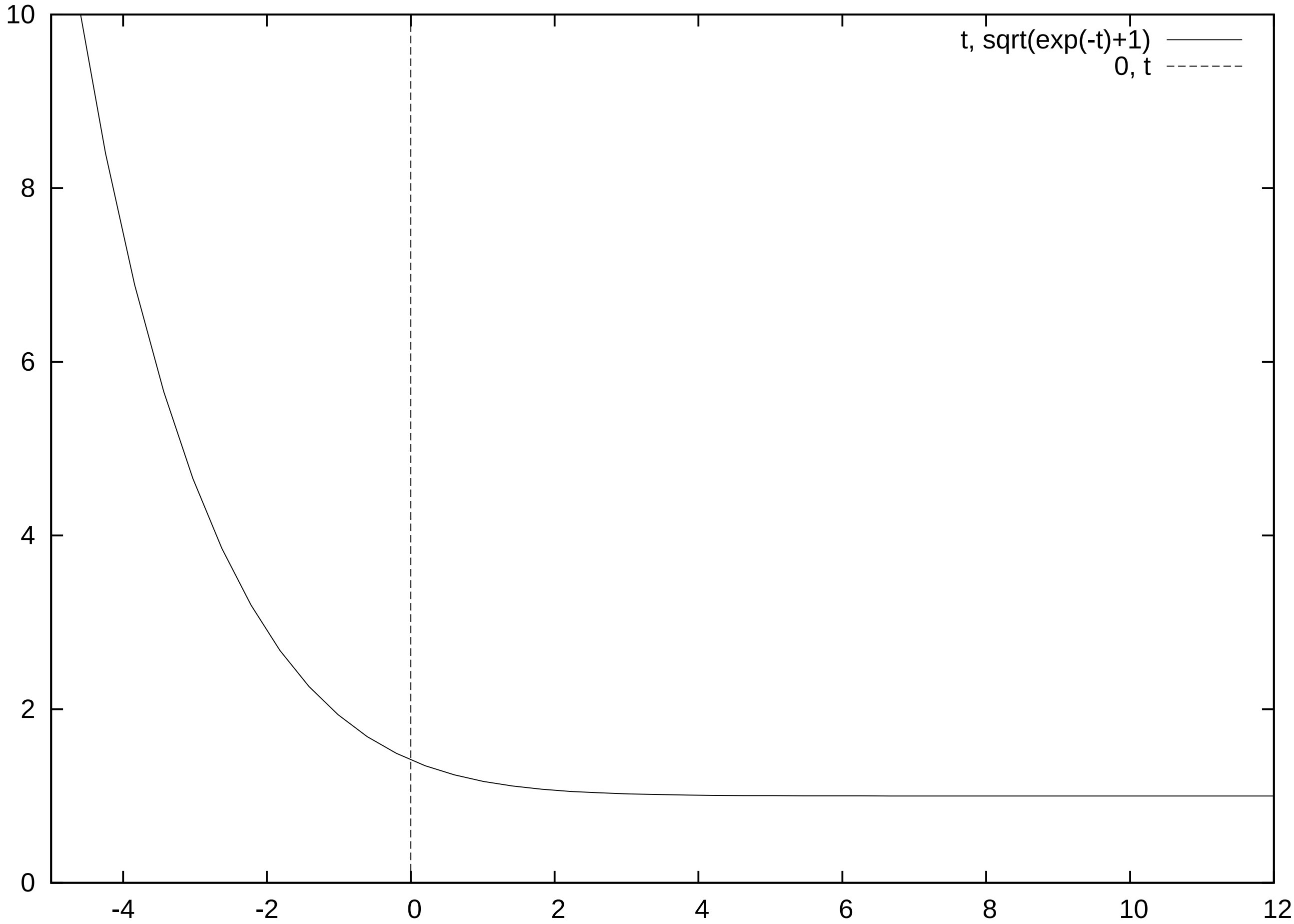
2. La funzione f è invertibile sul suo dominio di definizione? Se lo è, calcolare f^{-1} e disegnarne qualitativamente il grafico. Se no, scegliere un sottoinsieme $D' \subset D$ su cui f risulta invertibile, quindi calcolare la corrispondente f^{-1} e disegnarne qualitativamente il grafico.

Soluzione

1. La funzione assegnata è definita nella regione in cui $1/(x^2-1) > 0$, ovvero $\{x < -1\} \cup \{x > 1\}$. La funzione è pari e quindi non invertibile (per ogni x nel dominio $f(x) = f(-x)$). Per fare un grafico qualitativo della funzione si noti che per $x > 1$ la funzione è decrescente, diverge a $+\infty$ in $x = 1$, e si annulla in $x = \sqrt{2}$. Vedi figura.



2. La funzione è invertibile sulla regione $x > 1$. In tale regione $y = \log(1/(x^2-1)) \Leftrightarrow e^y = 1/(x^2-1) \Leftrightarrow x^2-1 = e^{-y} \Leftrightarrow x = \sqrt{1+e^{-y}} = f^{-1}(y)$, il cui grafico si puó ottenere dal ramo destro del precedente, dopo una rotazione e una riflessione degli assi. Vedi figura.



Esercizio 4.

Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Si calcoli $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
2. Si calcoli il coseno dell'angolo φ tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
3. Si calcoli $(3\vec{v} + \vec{w}) \cdot (-\vec{v} + 2\vec{w})$.
4. Sia $\vec{u}_1$ un vettore perpendicolare a $\vec{v}$ di lunghezza 3. Si calcoli $|\vec{u}_1 \times \vec{v}|$.
5. Si trovi un vettore $\vec{u}_2$ che appartiene al piano $x\,y$, perpendicolare a $\vec{v} + \vec{w}$ e di lunghezza 1.

Soluzione.

1. Si ha $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-2 \cdot 1) = -2$.
2. Si ha $\cos\varphi = \vec{v} \cdot \vec{w}/(|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|)$, dove $|\vec{v}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ e $|\vec{w}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$. Quindi: $\cos\varphi = -2/(3\sqrt{6})$.
3. Iniziamo a calcolare i vettori $(3\vec{v} + \vec{w})$ e $(-\vec{v} + 2\vec{w})$. Si ha:

$$(3\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad (-\vec{v} + 2\vec{w}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Moltiplicando scalarmente questi due vettori troviamo:

$$(3\vec{v} + \vec{w}) \cdot (-\vec{v} + 2\vec{w}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 15 - 20 - 20 = -25\,.$$

4. Si ha: $|\vec{u}_1 \times \vec{v}| = |\vec{u}_1| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$, dove $\theta = \pi/2$ è l'angolo tra i due vettori. Usando che $|\vec{u}_1| = 3$, $|\vec{v}| = 3$ e $\sin\theta = 1$, troviamo $|\vec{u}_1 \times \vec{v}| = 9$.
5. Dato che $\vec{u}_2$ appartiene al piano xy, la sua coordinata lungo l'asse z è uguale a zero. Possiamo allora scrivere $\vec{u}_2 = (x, y, 0)$. Dato che $\vec{u}_2$ è perpendicolare a $\vec{v} + \vec{w} = (3, 1, -1)$, abbiamo che $\vec{u}_2 \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$, da cui $(x, y, 0) \cdot (3, 1, -1) = 3x + y = 0$, ovvero $y = -3x$. Infine, dato che $|\vec{u}_2|^2 = 1$, abbiamo che $x^2 + y^2 = 1$ e quindi $x^2 + (-3x)^2 = 10x^2 = 1$, da cui $x = \pm 1/\sqrt{10}$. Ci sono quindi due possibili scelte per $\vec{u}_2$: o $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5.
Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .$$

1. Determinare il vettore $\vec{u} = A\vec{v}$.
2. Verificare che $A \cdot B \neq B \cdot A$.
3. Determinare il vettore $\vec{w}$ tale che $B\vec{w} = \vec{v}$ (suggerimento: si riscriva l'equazione in coordinate, nella forma di un sistema lineare e si risolva tale sistema).
4. Calcolare gli autovalori di A.
5. (*Punto facoltativo*) Calcolare gli autovettori di A.

Soluzione.

1. Si ha:
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad .$$
2. Si ha:
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
e
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
e quindi $A \cdot B \neq B \cdot A$.
3. Se scriviamo $\vec{w} = (x, y, z)$, le componenti di $\vec{w}$ soddisfano la seguente equazione:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x-z \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x+z=1 \\ -x+z=2 \\ 2y=3 \end{cases} ,$$
da cui si trova che:
   - $2x = (x+z) - (-x+z) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow x = -1/2$;
   - $2z = (x+z) + (-x+z) = 1 + 2 = 3 \Rightarrow z = 3/2$;
   - $y = 3/2$.

   In conclusione:
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad .$$

4. Gli autovalori λ di A soddisfazione all'equazione $\det(A-\lambda I)=0$, dove:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}5-\lambda & 4 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante di $A-\lambda I$ lungo la prima colonna si trova:

$$\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 4 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)$$

Imponendo $\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)=0$ troviamo gli autovalori $\lambda=5,2,-1$.

5.

(a) Cerchiamo un autovettore $\vec{v}_1$ corrispondente a $\lambda_1=5$. Se chiamiamo x,y,z le tre componenti di $\vec{v}_1$, troviamo:

$$\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad\Longrightarrow\begin{cases}5x+4y+z=5x\\ 2y-z=5y\\ -z=5z\end{cases}.$$

Dall'ultima equazione troviamo $z=0$. Sostituendo nella seconda troviamo $y=0$ e dalla prima vediamo che x è arbitrario: quindi possiamo scegliere

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

(b) Cerchiamo un autovettore $\vec{v}_2$ corrispondente a $\lambda_1=2$. Se chiamiamo x,y,z le tre componenti di $\vec{v}_2$, troviamo:

$$\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad\Longrightarrow\begin{cases}5x+4y+z=2x\\ 2y-z=2y\\ -z=2z\end{cases}.$$

Dall'ultima equazione troviamo $z=0$. Sostituendo nella seconda troviamo che y é arbitrario. Dalla prima vediamo che $3x=-4y$. Se scegliamo $y=1$ troviamo $x=-4/3$ e quindi:

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-4/3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

(c) Cerchiamo un autovettore $\vec{v}_3$ corrispondente a $\lambda_3=-1$. Se chiamiamo x,y,z le tre componenti di $\vec{v}_3$, troviamo:

$$\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad\Longrightarrow\begin{cases}5x+4y+z=-x\\ 2y-z=-y\\ -z=-z\end{cases}.$$

Dall'ultima equazione troviamo che z é arbitrario. Sostituendo nella seconda troviamo $3y=z$ (quindi $y=z/3$) e dalla prima vediamo che $6x=-4y-z=-4(z/3)-z=-7z/3$. Se scegliamo $z=1$ troviamo $y=1/3$, $x=-7/18$, e quindi:

$$\vec{v}_3=\begin{pmatrix}-7/18\\ 1/3\\ 1\end{pmatrix}.$$