SECONDO APPELLO – 9 FEBBRAIO 2009

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Determinare le quattro radici complesse di $z^4 + 1 = i$.
Soluzione. Riscriviamo l'equazione assegnata nella forma $z^4 = z_0$, con
$$z_0 = -1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big)\,.$$
Usando la formula di De Moivre, troviamo che
$$z = 2^{1/8}\Big(\cos\big(\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\big)\Big)\,,$$
con $k = 0, 1, 2, 3$.

2. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2 - 1}}$.
Soluzione. Il dominio di f è definito dalla condizione $1 - \sqrt[3]{x^2 - 1} \geq 0$, ovvero $x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

3. Risolvere la disuguaglianza $\log_x\big(\frac{x^2+1}{4}\big) \leq 1$.
Soluzione. Notiamo innanzitutto che la funzione assegnata è ben definita su $x > 0$. Usando che $\log_x\big(\frac{x^2+1}{4}\big) = \log\big(\frac{x^2+1}{4}\big)\cdot\frac{1}{\log x}$, la disuguaglianza assegnata è equivalente a
$$\frac{\log\big(\frac{x^2+1}{4}\big)}{\log x} \leq 1 \iff \frac{\log\big(\frac{x^2+1}{4}\big) - \log x}{\log x} \leq 0 \iff \frac{\log\big(\frac{x^2+1}{4x}\big)}{\log x} \leq 0\,.$$
Ora: il denominatore è negativo per $0 < x < 1$, nullo in $x = 1$ e positivo per $x > 1$. Il numeratore è ≥ 0 per $\frac{x^2+1}{4x} \geq 1$ che, per $x > 0$, equivale alla condizione $x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \{0 < x < 2 - \sqrt{3}\} \cup \{x > 2 + \sqrt{3}\}$. In conclusione, la disuguaglianza assegnata è risolta dagli x tali che $\{0 < x \leq 2 - \sqrt{3}\} \cup \{1 < x \leq 2 + \sqrt{3}\}$.

4. Determinare l'inversa di $f(x) = \tan(\arcsin x)$ sull'intervallo $(-1, 1)$.
Soluzione. Si noti innanzitutto che la funzione assegnata è invertibile sull'intervallo $(-1, 1)$. Su tale intervallo, se $y = \tan(\arcsin x)$, allora $\arctan y = \arcsin x$, ovvero $x = \sin(\arctan y)$: la funzione inversa è quindi $g(y) = \sin(\arctan y)$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare la derivata di $f(x) = 3^{\cos x}$.
Soluzione. Riscrivendo $f(x) = e^{\log 3\cdot\cos x}$ e usando la regola di derivazione delle funzioni composte troviamo:
$$\frac{d}{dx}e^{\log 3\cdot\cos x} = 3^{\cos x}\cdot\log 3\cdot(-\sin x)\,.$$

6. Determinare il vettore parallelo a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, di lunghezza 2 e di verso opposto a $\vec{v}$.
Soluzione. I vettori paralleli a $\vec{v}$ sono tutti e soli i vettori della forma: $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ -2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

se $t > 0$, $\vec{u}(t)$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$, altrimenti il verso opposto. La lunghezza di $\vec{u}(t)$ è $|\vec{u}(t)| = |t|\sqrt{1+9+4} = |t|\sqrt{14}$. Imponendo che $|\vec{u}(t)| = 2$ si trova $|t| = 2/\sqrt{14}$. Quindi il vettore richiesto è

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{14} \\ -6/\sqrt{14} \\ 4/\sqrt{14} \end{pmatrix} .$$

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calcolare A^2.

   Soluzione. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ -10 & -3 & -10 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare $\det A$, $\det(A^2)$ e, se possibile, la matrice inversa A^{-1}.
   Soluzione. Si ha $\det A = 0$, e quindi $\det(A^2) = (\det A)^2 = 0$. La matrice A non è quindi invertibile.

3. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e si consideri il sistema lineare $A\vec{w} = \vec{v}$, con $\vec{w}$ un vettore incognito. Si stabilisca se è risolubile e, in caso, se ne determini una soluzione.
   Soluzione. Per il criterio di Cramer, dato che $\det A = 0$, il sistema assegnato, della forma:

$$\begin{cases} w_1 - 2w_3 = 0 \\ 3w_1 + w_2 + 4w_3 = 2 \\ -4w_1 - w_2 - 2w_3 = -2 \end{cases}$$

   o non ha soluzioni o ha infinite soluzioni. Proviamo a vedere se il sistema ammette soluzioni risolvendolo per sostituzione. Dalla prima equazione troviamo $w_1 = 2w_3$; quindi, sostituendo nella seconda, troviamo: $3(2w_3) + w_2 + 4w_3 = 2 \Rightarrow w_2 = 2 - 10w_3$; infine sostituendo le espressioni per w_1 e w_2 nell'ultima, troviamo: $-4(2w_3) - (2 - 10w_3) - 2w_3 = -2$, che è un'identità, qualunque sia il valore di w_3. Quindi il sistema assegnato ammette infinite soluzioni, ad esempio $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, che si ottiene per $w_3 = 0$.

4. Sia $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si determini l'equazione della retta ortogonale a $\vec{u}$, passante per l'origine e appartenente al piano $x\,z$.

   Soluzione. I punti $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ della retta assegnata soddisfano alle condizioni $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ (dato che deve essere ortogonale a $\vec{u}$) e $y = 0$ (dato che la retta deve appartenere al piano xz). L'equazione risultante è:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ y = 0\ , \end{cases}$$

   ovvero

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0\ . \end{cases}$$

Esercizio 3.

1. Si calcoli lo sviluppo di Taylor del terz'ordine in $x_0 = 0$ di $\arcsin x$.
   Soluzione. Definendo $f(x) = \arcsin x$, abbiamo: $f(0) = 0$; $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\big|_{x=0} = 1$; $f''(0) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\big|_{x=0} = 0$; $f'''(0) = \left[\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}\right]_{x=0} = 1$. Quindi:
$$f(x) = \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\ .$$

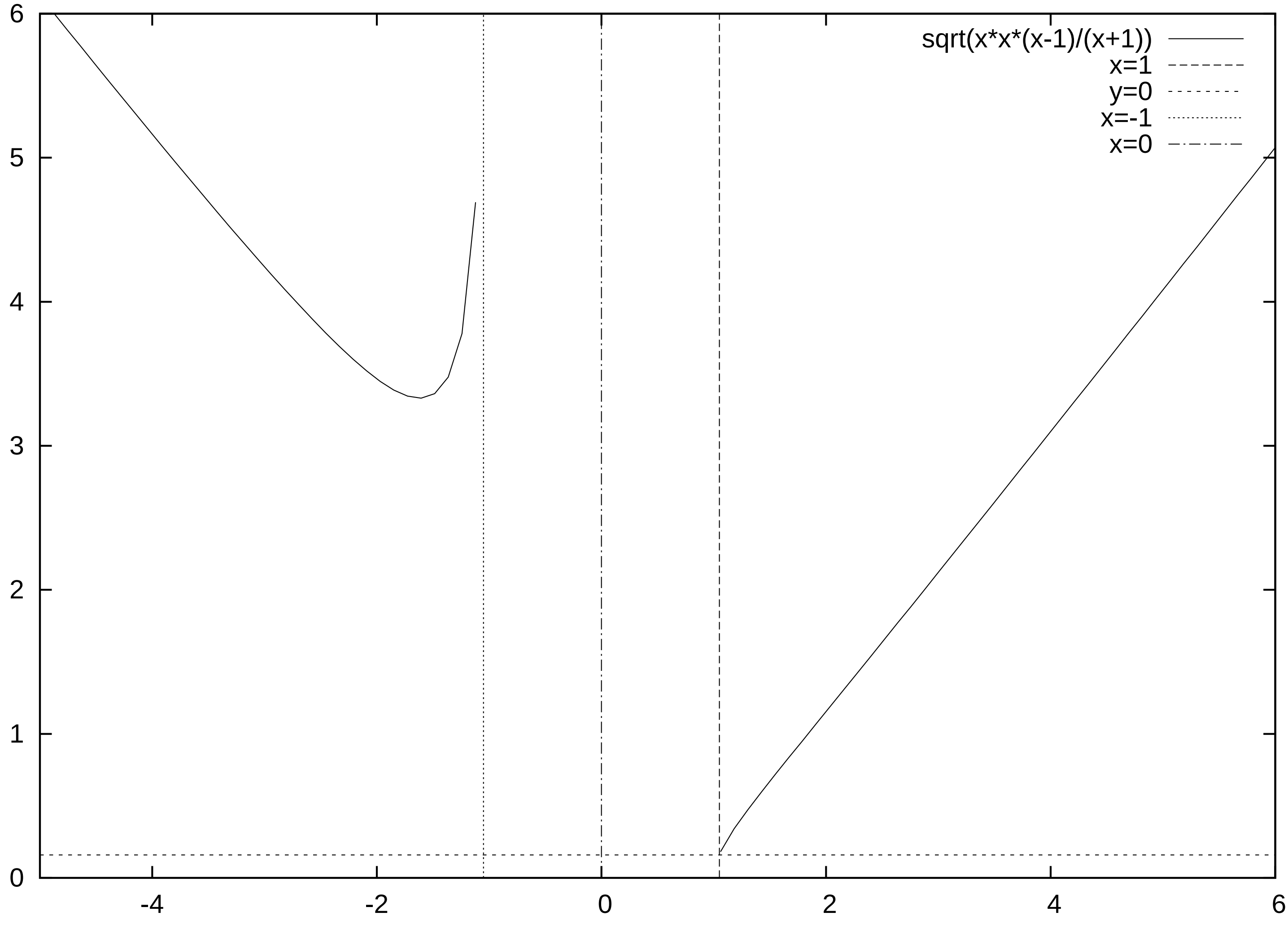
2. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\log(1+x^3)}\ .$$
   Soluzione. Usando che $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ e $\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)$, troviamo:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\log(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/6 - x - x^3/6 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{3}\ .$$

Esercizio 4.
Sia
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}\ .$$
Si studi $f(x)$ (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali e/o obliqui, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.
Soluzione. Il dominio di definizione D di f corrisponde alla regione in cui $(x-1)/(x+1) \geq 0$, ovvero $D = \{x \geq 1\} \cup \{x < -1\}$.
Su tale regione la funzione è nonnegativa, e si annulla solo in $x = 1$.
Ai bordi del dominio di definizione abbiamo: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$; quindi la funzione ammette un asintoto verticale in $x = -1$.
Controlliamo se all'infinito la funzione ammette asintoti obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm 1$ e $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) \mp x = \mp 1$; quindi la funzione, per $x \to \pm\infty$, ammette gli asintoti obliqui $y = \pm(x-1)$.
Per determinare le regioni in cui $f(x)$ cresce o decresce, studiamone il segno della derivata: per $x \in D \setminus \{x = 1\}$,
$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)}\left[\frac{2x(x-1)}{x+1} + \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}\right] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}\ ,$$
che è negativa per $x < -(1+\sqrt{5})/2$, si annulla in $x = -(1+\sqrt{5})/2$, è positiva per $-(1+\sqrt{5})/2 < x < -1$ e $x > 1$, e diverge a $+\infty$ per $x \to 1^+$. Quindi $f(x)$:

1. è strettamente decrescente tra $-\infty$ e $-(1+\sqrt{5})/2$;
2. ha un minimo relativo in $-(1+\sqrt{5})/2$;
3. è strettamente crescente tra $-(1+\sqrt{5})/2$ e -1, dove ha l'asintoto verticale;
4. ha una cuspide in $x = 1$;
5. è strettamente crescente per $x > 1$.

Di conseguenza la funzione assegnata ammette come minimo assoluto 0 (assunto in $x = 1$) e non assume massimo (poiché tende a $+\infty$ ai bordi del dominio di definizione).

Il grafico risultante è riportato in figura.


sqrt(x*x*(x-1)/(x+1))
x=1
y=0
x=-1
x=0
6
5
4
3
2
1
0
-4
-2
0
2
4
6

Esercizio 5.

1. Calcolare
$$\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx\ .$$

   Soluzione. Si noti che il discriminante associate al denominatore è <0 (il denominatore è sempre positivo – si può in effetti riscrivere nella forma $(x+2)^2+4$) e che la derivata del denominatore è uguale a $2x+4$. Conviene dunque scrivere:
$$\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+4x+8) - \frac{2}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\ .$$
   Cambiando variabile nell'ultimo integrale (ponendo $t=(x+2)/2$), troviamo infine:
$$\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+4x+8) - \arctan\frac{x+2}{2} + c\ .$$

2. Calcolare
$$\int_1^e x\log x\,dx\ .$$

   Soluzione. Integrando per parti troviamo:
$$\int_1^e x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}\ .$$