SECONDO ESONERO – 22 GENNAIO 2009

• **Motivare il lavoro svolto**
• **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Determinare coefficiente angolare e intercetta dell'asintoto obliquo di $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-7}$.

   Soluzione. $f(x)$ è asintotica a $mx + q$ per $x \to \pm\infty$ se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = m$ e $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = q$. Nel nostro caso
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2-7x} = 1$$
   e
$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\frac{x^2+3x+1}{x-7} - x\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\frac{x^2+3x+1-x^2+7x}{x-7}\Big) = 10$$
   e quindi $f(x) \sim x + 10$ per $x \to \pm\infty$.

2. Calcolare $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2+n}$.

   Soluzione. Possiamo riscrivere
$$\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^{n^2+n} = \left[\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^{n^2}\right]^{1+\frac{1}{n}}$$
   dove l'espressione dentro parentesi quadra tende a e e l'esponente $(1+1/n)$ tende a 1. Di conseguenza il limite richiesto è uguale a e.

3. Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2-\cos x}{3x^2} & \text{se} \quad x \neq 0\ , \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0\ . \end{cases}$
   Si stabilisca se f è continua in $x = 0$.

   Soluzione. Per definizione, una funzione $f(x)$ è continua in $x = 0$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Nel nostro caso,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\Big(1 + \frac{1-\cos x}{x^2}\Big) = \frac{1}{3}\big(1+\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2} = f(0)\ ,$$
   quindi $f(x)$ è continua in $x = 0$.

4. Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan\sqrt{\log x}$ sul suo insieme di definizione.

   Soluzione. Usando la formula di derivazione delle funzioni composte troviamo:
$$\frac{d}{dx}\arctan\sqrt{\log x} = \frac{1}{1+\log x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\log x}}\cdot\frac{1}{x}\ .$$

5. Determinare l'equazione della retta tangente a $f(x) = e^{x^2-x}$ nel punto $x_0 = 1$.

   Soluzione. Si ha $f(1) = 1$ e
$$f'(1) = \frac{d}{dx}e^{x^2-x}\Big|_{x=1} = e^{x^2-x}(2x-1)\Big|_{x=1} = 1\ ,$$

da cui si trova che l'equazione della tangente richiesta è $y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + (x-1)$, ovvero $y = x$.

6. Determinare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$.

   Soluzione. L'integrale indefinito di $f(x)$ si può calcolare per sostituzione $t = \log x$, da cui, usando la relazione $dt = \frac{dx}{x}$, troviamo:

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt \Big|_{t=\log x} = \frac{(\log x)^2}{2} + c\ .$$

   Quindi una possibile primitiva di f è $F(x) = \frac{(\log x)^2}{2}$.

Esercizio 2.

Sia $f(x) = \sinh x \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Si calcoli lo sviluppo di Taylor del terz'ordine in $x_0 = 0$ di $f(x)$.

   Soluzione. Lo sviluppo di Taylor del terz'ordine in 0 di una funzione $f(x)$ è dato dalla formula:

   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + o(x^3)\ .$$

   Nel nostro caso $f'(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $f''(x) = (e^x - e^{-x})/2$ e $f'''(x) = (e^x + e^{-x})/2$, da cui: $f(0) = f''(0) = 0$ e $f'(0) = f'''(0) = 1$. Quindi lo sviluppo richiesto è:

   $$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\ .$$

2. Calcolare, se esiste,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - x}{\sin x - x\cos x}\ .$$

   Soluzione. Il limite richiesto è una forma indeterminata del tipo 0/0. Sviluppando con la formula di Taylor il numeratore fino al terz'ordine troviamo: $\sinh x - x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Per sviluppare con la formula di Taylor il denominatore possiamo usare che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, da cui $\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)$, ovvero $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Possiamo quindi risolvere il limite assegnato usando la formula di Taylor:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - x}{\sin x - x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3.
Sia
$$f(x) = (\log x)^2 - (\log x)^4 \ .$$
Si studi $f(x)$ (dominio, segno, asintoti orizzontali e/o verticali, derivata, massimi e/o minimi relativi, massimi e/o minimi assoluti) e se ne disegni il grafico.

Soluzione. La funzione è definita sul dominio $\{x > 0\}$. In tale regione la funzione è nonnegativa per
$$(\log x)^2 - (\log x)^4 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - (\log x)^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ -1 \leq \log x \leq 1 \ \Leftrightarrow \ e^{-1} \leq x \leq e \ .$$
Viceversa, la funzione è negativa per $0 < x < e^{-1}$ e $x > e$, e si annulla in $x = e^{-1}, 1, e$.

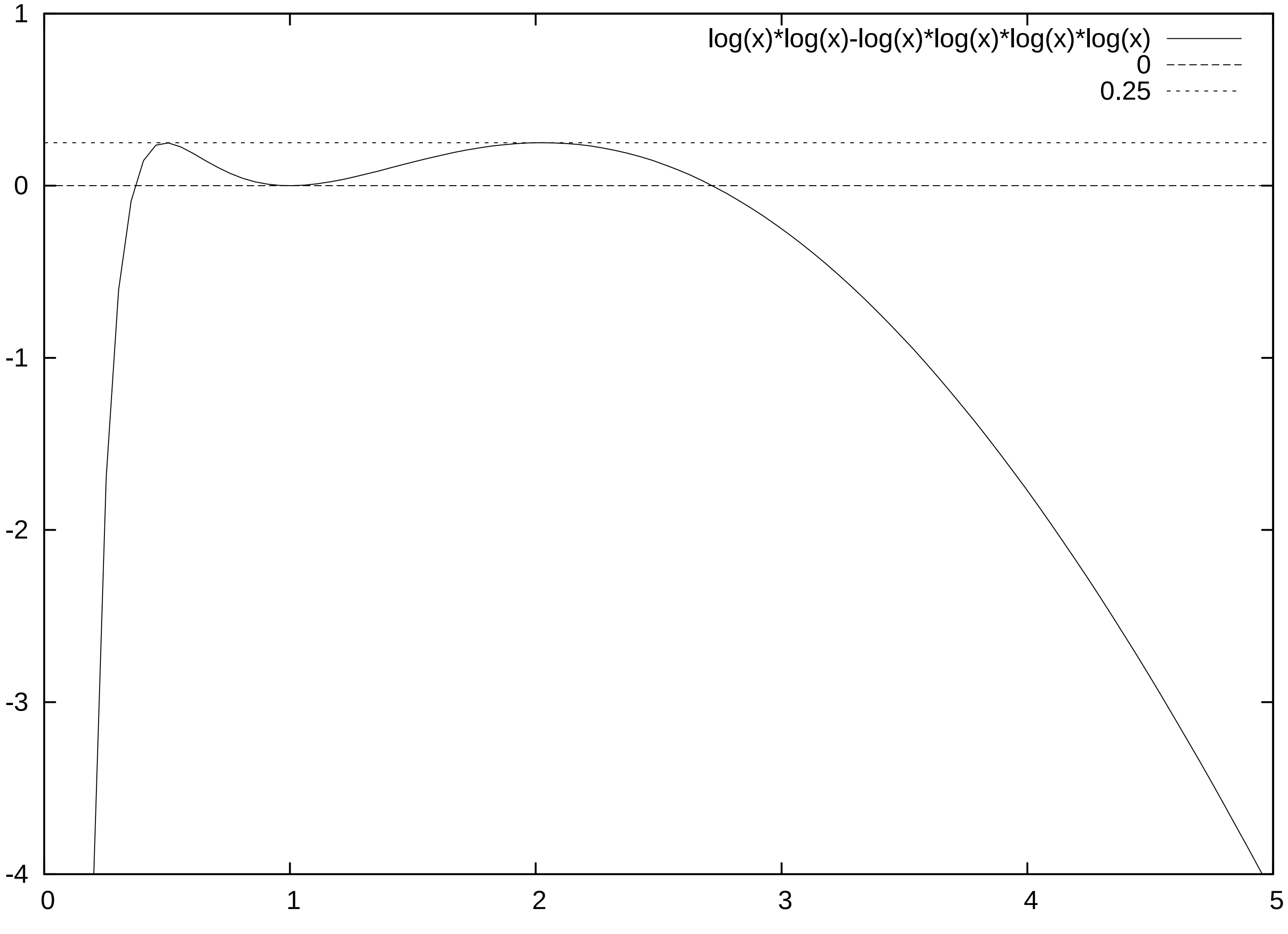
Ai bordi del dominio di definizione (ovvero per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$), la funzione si comporta come segue:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ ,$$
che vuol dire che la funzione ha un asintoto verticale in $x = 0$.

Cerchiamo ora di determinare i massimi e minimi relativi, studiando il segno della derivata di $f(x)$. Si ha:
$$f'(x) = \frac{2}{x} \log x \Big(1 - 2(\log x)^2 \Big) \ ,$$
che è: positiva in $\{0 < x < e^{-1/\sqrt{2}}\} \cup \{1 < x < e^{1/\sqrt{2}}\}$, negativa in $\{e^{-1/\sqrt{2}} < x < 1\} \cup \{x > e^{1/\sqrt{2}}\}$, e nulla in $x = e^{-1/\sqrt{2}}, 1, e^{1/\sqrt{2}}$. Quindi $f(x)$:

1. è strettamente crescente tra 0 e $e^{-1/\sqrt{2}}$;
2. ha un massimo relativo in $e^{-1/\sqrt{2}}$, dove assume il valore $f(e^{-1/\sqrt{2}}) = 1/4$;
3. è strettamente decrescente tra $e^{-1/\sqrt{2}}$ e 1;
4. ha un minimo relativo in 1, dove assume il valore $f(1) = 0$;
5. è strettamente crescente tra 1 e $e^{1/\sqrt{2}}$;
6. ha un massimo relativo in $e^{1/\sqrt{2}}$, dove assume il valore $f(e^{1/\sqrt{2}}) = 1/4$;
7. è strettamente decrescente per $x > e^{1/\sqrt{2}}$.

Di conseguenza la funzione assegnata non assume minimo assoluto (poiché tende a $-\infty$ ai bordi del dominio di definizione) e ammette $1/4$ come massimo assoluto (che è assunto nei punti $x = e^{\pm 1/\sqrt{2}}$).

Il grafico risultante è riportato in figura.



log(x)*log(x)-log(x)*log(x)*log(x)*log(x)
0
0.25
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5

Esercizio 4. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2-x-2}\ .$$

Soluzione. Eseguendo la divisione, si trova che
$$\frac{x^3+3x}{x^2-x-2} = x+1+\frac{6x+2}{x^2-x-2}\ .$$
Il denominatore x^2-x-2 dell'ultima frazione ha radici $x_\pm = \big(1\pm\sqrt{1+8}\big)/2 = (1\pm 3)/2$, e può quindi essere riscritto nella forma $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. L'ultima frazione può essere allora riscritta nella forma:
$$\frac{6x+2}{x^2-x-2} = \frac{6x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\ ,$$
con A e B fissati dalla condizione che
$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+B)}{(x+1)(x-2)}\ ,$$
ovvero $A+B=6$, $-2A+B=2$, da cui si trova: $A=4/3$ e $B=14/3$.

In conclusione, possiamo riscrivere:
$$\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2-x-2}\,dx = \int_0^1 \Big(x+1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\Big)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{4}{3}\log|x+1|+\frac{14}{3}\log|x-2|\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}+1+\frac{4}{3}\log 2-\frac{14}{3}\log 2 = \frac{3}{2}-\frac{10}{3}\log 2\ .$$

Esercizio 5. (Facoltativo)

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{2}\right]^n} \ .$$

Soluzione. Nel limite $n \to \infty$, l'espressione $(\frac{n+1}{n})^n$ dentro parentesi quadre tende ad $e = 2.718...$, mentre il termine $(\sin n)/2$ oscilla tra $-1/2$ e $1/2$. Quindi, per ogni $\epsilon > 0$ e per n abbastanza grande, l'espressione dentro parentesi quadre può essere stimata come segue:

$$e - \epsilon - \frac{1}{2} < \left[(\frac{n+1}{n})^n + \frac{\sin n}{2}\right] < e + \epsilon + \frac{1}{2} \ .$$

Scegliendo, ad es., $\epsilon = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{2}\right) = (0.5) \cdot 2.218... \simeq 1.109...$, troviamo:

$$1.1 < \left[(\frac{n+1}{n})^n + \frac{\sin n}{2}\right] < 3.4$$

e quindi:

$$\frac{1}{(3.4)^n} < \frac{1}{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{\sin n}{2}\right]^n} < \frac{1}{(1.1)^n} \ .$$

Usando il teorema dei carabinieri, si trova che il limite assegnato esiste ed è uguale a zero.