

PRIMO ESONERO – 12 NOVEMBRE 2009

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

Esercizio 1. Rispondere alle seguenti domande.

1. Si determini l'insieme di definizione D di $f(x) = [\log(1 - x)]^{1/4}$.
2. La funzione f del punto precedente è strettamente decrescente su tutto D . Di conseguenza, f è invertibile: determinarne l'inversa f^{-1} .
3. Calcolare $\log_2 8 - \log_8 2$.

4. Risolvere la disequazione $\frac{1-x-x^2}{\sqrt{2x-1}} \leq 0$.

5. Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Per quali valori di k i vettori \vec{v} e \vec{w} sono paralleli?

6. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, si calcoli $A^2 - \frac{1}{2}(3I + A)$.

Esercizio 2.

Sia

$$f(x) = \sqrt{2 - e^{x-1}}.$$

1. Si determini l'insieme D di definizione di f .
2. Disegnare qualitativamente il grafico di $y = f(x)$. [Si noti che f può essere pensata come la composizione della funzione “radice quadrata” con la funzione $2 - e^{x-1}$. Si studi prima il grafico di quest'ultima funzione e poi si disegni il grafico della sua radice].
3. Determinare l'immagine $\text{Im}(D)$ del dominio D attraverso f .
4. La funzione $f : D \rightarrow \text{Im}(D)$ è invertibile sul suo dominio di definizione? Se lo è, calcolare $f^{-1} : \text{Im}(D) \rightarrow D$ e disegnarne qualitativamente il grafico. Se no, scegliere un sottoinsieme $D' \subset D$ su cui f risulta invertibile, quindi calcolare la corrispondente f^{-1} e disegnarne qualitativamente il grafico.

Esercizio 3.

Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Si calcoli il versore \hat{w} associato a \vec{w} .
2. Si calcoli la proiezione $\vec{v} \cdot \hat{w}$ di \vec{v} su \hat{w} .
3. Si calcoli il coseno dell'angolo φ tra \vec{v} e \hat{w} .
4. Sia $\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 1-k \\ 0 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Per quale valore di k il vettore \vec{u} è perpendicolare a \vec{v} ? Esistono valori di k per cui \vec{u} è parallelo a \vec{w} ?
5. Si calcoli $\vec{v} \times \vec{w}$.
6. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che A è invertibile, calcolarne l'inversa A^{-1} e verificare che $A^{-1} \cdot A = I$.
2. Risolvere il seguente sistema con la regola di Cramer:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Si verifichi per sostituzione che la soluzione trovata risolve il sistema assegnato. Si discuta se la soluzione trovata è unica.

3. Calcolare gli autovalori di A .
4. Calcolare gli autovettori di A e verificare che sono mutualmente ortogonali.
5. (*Facoltativo*) Determinare la matrice diagonale Λ e la matrice di rotazione R che permettono di riscrivere A nella forma $A = R\Lambda R^{-1}$.