

## Un breve compendio su autovalori e autovettori (21 dicembre 2018)

Corso di Matematica I per Geologia

**Autovalori e autovettori.** Data una matrice quadrata  $A$ , ogni vettore  $\vec{v} \neq \vec{0}$  che soddisfa

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (1)$$

per qualche costante  $\lambda$  si dice *autovettore* di  $A$ . Il valore  $\lambda$  è il corrispondente *autovalore*. L'equazione (1) si può equivalentemente riscrivere nella forma:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}, \quad (2)$$

dove  $I$  è la matrice identità. La (2) è un sistema lineare che sicuramente ammette la soluzione nulla  $\vec{v} = \vec{0}$ . Noi siamo interessati a trovare una soluzione non nulla  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Affinchè ciò sia possibile, dobbiamo richiedere che

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (3)$$

che è l'equazione caratteristica per gli autovalori. Una volta trovata una soluzione  $\lambda = \lambda^*$  alla (3), un autovettore corrispondente,  $\vec{v}^*$ , si trova risolvendo la (1).

**Caso  $2 \times 2$ .** Se  $A$  è una matrice  $2 \times 2$  di elementi  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , l'equazione caratteristica diventa:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \iff \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (4)$$

che è un'equazione quadratica per  $\lambda$ , le cui soluzioni sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right]. \quad (5)$$

Una volta identificati gli autovalori, gli autovettori si ricavano imponendo la (1) in corrispondenza di  $\lambda = \lambda_{\pm}$ . Consideriamo ad esempio l'autovalore  $\lambda_+$ . Un autovettore corrispondente  $\vec{v}_+$  è una soluzione non nulla dell'equazione  $A\vec{v}_+ = \lambda_+\vec{v}_+$ . Più esplicitamente, se chiamiamo  $x$  e  $y$  le due coordinate (incognite) di  $\vec{v}_+$ , l'equazione per determinarle assume la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax + by = \lambda_+x \\ cx + dy = \lambda_+y \end{cases}. \quad (6)$$

La condizione  $\det(A - \lambda_+I) = 0$  implica che le due equazioni del sistema sono equivalenti (ovvero: la seconda si ottiene dalla prima moltiplicandola per una costante opportuna). Quindi, ogni coppia di costanti  $(x, y)$  non simultaneamente nulle, tali che  $(a - \lambda_+)x + by = 0$  è soluzione della (6), ad esempio  $x = b, y = \lambda_+ - a$ . Ogni altra soluzione è proporzionale a questa. In conclusione, ogni vettore della forma

$$\vec{v}_+ = \alpha \begin{pmatrix} b \\ \lambda_+ - a \end{pmatrix}, \quad (7)$$

con  $\alpha$  una costante qualsiasi diversa da zero, è un autovettore di autovalore  $\lambda_+$ . Una procedura analoga è valida per ricavare l'autovettore  $\vec{v}_-$  di autovalore  $\lambda_-$ .

**Un esempio.** Consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  e calcoliamone autovalori ed autovettori. Gli autovalori sono le soluzioni di

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (1 - \lambda)^2 - 6 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0,$$

ovvero  $\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{6}$ , che sono quindi gli autovalori di  $A$ . Calcoliamo un autovettore  $\vec{v}_+$  associato a  $\lambda_+ = 1 + \sqrt{6}$ : l'equazione per le sue coordinate è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + \sqrt{6}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = (1 + \sqrt{6})x \\ 3x + y = (1 + \sqrt{6})y \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{6}x + 2y = 0 \\ 3x - \sqrt{6}y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Con riferimento all'ultimo sistema di due equazioni, si noti che moltiplicando la prima equazione per  $-\sqrt{6}$  si ottiene la seconda, che quindi è equivalente alla prima. In conclusione, ogni coppia di valori  $x$  e  $y$  tali che  $-\sqrt{6}x + 2y = 0$  sono soluzioni della (8), ad esempio:  $x = 2$ ,  $y = \sqrt{6}$ , od ogni altra coppia a questa proporzionale. Equivalentemente, ogni vettore della forma

$$\vec{v}_+ = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

con  $\alpha$  una qualsiasi costante reale diversa da zero, è autovettore di autovalore  $\lambda_+ = 1 + \sqrt{6}$ . Ripetendo lo stesso ragionamento per  $\lambda_- = 1 - \sqrt{6}$ , si trova che ogni vettore della forma  $\vec{v}_- = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$ , con  $\alpha$  una qualsiasi costante reale diversa da zero, è autovettore di autovalore  $\lambda_- = 1 - \sqrt{6}$  (lo si verifichi per esercizio).

**Osservazioni e commenti.** Per semplicità ci limitiamo a commentare il caso  $2 \times 2$ . Commenti analoghi sono validi per matrici quadrate di dimensione maggiore.

1. Come discusso sopra, se  $\vec{v}^* \neq \vec{0}$  è autovettore di  $A$  con autovalore  $\lambda^*$ , allora anche  $\alpha\vec{v}^*$ , con  $\alpha$  una qualsiasi costante diversa da zero, è autovettore di  $A$  con lo stesso autovalore. Ogni autovettore di  $A$  identifica quindi una direzione nel piano o, equivalentemente, una retta passante per l'origine; tale direzione talvolta si chiama 'autodirezione' della matrice  $A$ . Per identificare tale direzione è sufficiente assegnare un vettore di lunghezza unitaria. Quindi, senza perdita di generalità, si può sempre supporre che gli autovettori di  $A$  siano di lunghezza 1.
2. L'interesse di identificare gli autovettori di  $A$  sta nel fatto che l'azione di  $A$  sugli autovettori è la più semplice possibile: consiste semplicemente nella moltiplicazione per una costante (il corrispondente autovalore).
3. Se una matrice  $A$  ammette due autovettori linearmente indipendenti,  $\vec{v}_+$  e  $\vec{v}_-$ , allora tali autovettori identificano due direzioni trasversali nel piano. Ogni vettore  $\vec{v}$  del piano può quindi essere scritto come somma di un vettore parallelo a  $\vec{v}_+$  e di uno parallelo a  $\vec{v}_-$ ; più precisamente, dato un qualsiasi vettore  $\vec{v}$ , esistono due costanti  $c_+$  e  $c_-$  tali che

$$\vec{v} = c_+\vec{v}_+ + c_-\vec{v}_-$$

Una volta che  $\vec{v}$  viene scritto così, l'azione di  $A$  su  $\vec{v}$  assume una forma particolarmente semplice:

$$A\vec{v} = A(c_+\vec{v}_+ + c_-\vec{v}_-) = c_+A\vec{v}_+ + c_-A\vec{v}_- = c_+\lambda_+\vec{v}_+ + c_-\lambda_-\vec{v}_-,$$

dove  $\lambda_{\pm}$  sono gli autovalori di  $\vec{v}_{\pm}$ .

4. Dalla formula risolutiva (5), si vede che  $\lambda_+ + \lambda_- = a + d$ , mentre  $\lambda_+ \cdot \lambda_- = ad - bc$  (lo si verifichi per esercizio). La combinazione  $a + d$  corrisponde alla somma degli elementi sulla diagonale principale di  $A$ , e si chiama 'traccia della matrice  $A$ '; per indicarla, si usa il simbolo  $\text{Tr}A$ . La combinazione  $ad - bc$  invece non è altro che il determinante della matrice  $A$ . Gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono quindi i due numeri tali che la loro somma è pari alla traccia di  $A$ , mentre il loro prodotto è il determinante di  $A$ :

$$\lambda_+ + \lambda_- = \text{Tr}A, \quad \lambda_+ \cdot \lambda_- = \det A.$$

5. Non sempre gli autovalori sono reali: con riferimento alla (5), se  $(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$ , allora  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ammette due autovalori complessi coniugati. Ad esempio, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

la cui azione su un vettore  $\vec{v}$  del piano consiste nella rotazione di  $\vec{v}$  di un angolo  $\theta$  in senso antiorario. Gli autovalori si ottengono risolvendo la seguente equazione:

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0,$$

la cui soluzione è

$$\lambda_{\pm} = \cos \theta \pm \sqrt{(\cos \theta)^2 - 1}.$$

Ricordando che  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ , gli autovalori si possono equivalentemente riscrivere come

$$\lambda_{\pm} = \cos \theta \pm i \sin \theta,$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria. Quindi, se  $\theta \neq 0, \pi$ , gli autovalori non sono reali. Allo stesso tempo, gli autovettori corrispondenti non sono reali. C'è una semplice interpretazione geometrica di questo fatto: visto che l'azione di  $A$  su un qualsiasi vettore del piano consiste nel ruotarlo di un angolo  $\theta$ , non esiste nessuna direzione del piano che rimane invariata sotto l'azione di  $A$ ; di conseguenza, non esistono autovettori reali di  $A$ .

6. Visto che gli autovalori di una matrice  $2 \times 2$  sono le soluzioni di un'equazione quadratica (vedi (5)), ci sono tre casi: o gli autovalori sono reali distinti, o reali coincidenti, o non sono reali (e in tal caso i due autovalori sono complessi, e l'uno è il complesso coniugato dell'altro).
- Se gli autovalori sono reali distinti, allora esistono due autovettori reali linearmente indipendenti, l'uno associato al primo autovalore, e l'altro al secondo.
  - Se gli autovalori non sono reali, allora gli autovettori sono anch'essi complessi, e possono essere scelti l'uno il complesso coniugato dell'altro.
  - Se gli autovalori sono reali coincidenti, ci sono ancora due casi: o la matrice  $A$  è proporzionale alla matrice identità, ovvero  $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$  per qualche  $\gamma \in \mathbb{R}$ ; in tal caso tutti i vettori non nulli del piano sono autovettori con autovalore  $\gamma$ . Oppure  $A$  non è proporzionale alla matrice identità. In tal caso esiste una sola autodirezione associata all'unico autovalore di  $A$ ; in altre parole, non esistono due autovettori di  $A$  linearmente indipendenti.
7. Un teorema (di cui non discuteremo la dimostrazione) garantisce che, se  $A$  è una matrice *simmetrica*, se cioè i due elementi  $b$  e  $c$  fuori dalla diagonale principale sono uguali tra loro ( $b = c$ ), allora gli autovalori di  $A$  sono reali ed esistono sempre due autovettori tra loro ortogonali (e, in particolare, linearmente indipendenti).
8. Se  $\vec{v}^*$  è autovettore di  $A$  con autovalore  $\lambda^*$ , allora è anche autovettore di  $A^2$ , con autovettore  $(\lambda^*)^2$ . Infatti,  $A^2 \vec{v}^* = A \cdot A \vec{v}^* = A(A \vec{v}^*) = A(\lambda^* \vec{v}^*)$ , dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che  $A \vec{v}^* = \lambda^* \vec{v}^*$ . Ma quindi  $A^2 \vec{v}^* = A(\lambda^* \vec{v}^*) = \lambda^* A \vec{v}^* = (\lambda^*)^2 \vec{v}^*$ , che dimostra, come promesso, che  $\vec{v}^*$  è autovettore di  $A^2$  con autovalore  $(\lambda^*)^2$ . Ragionando in modo analogo si trova che  $\vec{v}^*$  è autovettore di  $A^n$ , qualunque sia la potenza intera  $n > 0$ , con autovalore  $(\lambda^*)^n$ . Inoltre, se  $A$  è invertibile,  $\vec{v}^*$  è anche autovettore di  $A^{-1}$ , con autovalore  $(\lambda^*)^{-1}$ .