Esercizi - decima settimana (10-14 dicembre 2018)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Siano dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (1, 0, 2)$.

1. Si determino i vettori $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{b} = 3\vec{v} - \vec{w}$;
2. Si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;
3. Si determini l'angolo ϕ compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
4. Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$.
5. Si discuta se i vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{a}$ sono linearmente indipendenti.

2. Siano dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 5, 2)$ e $\vec{w} = (0, 3, -1)$.

1. Si determini il vettore $\vec{a} = 2\vec{v} - 5\vec{w}$;
2. Si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;
3. Si determini l'angolo ϕ compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
4. Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e si dimostri che $\vec{a} \times \vec{v} = 5\vec{v} \times \vec{w}$.
5. Si discuta se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono linearmente indipendenti. Si discuta inoltre se $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{a}$ siano linearmente indipendenti.

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino le matrici A^2, B^2, AB e BA. Inoltre, se

$$C = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

si verifichi che $BC = CB = 0$.

4. Dato un vettore $\vec{v}$ del piano, associato al punto di coordinate cartesiane (x, y), lo si identifichi con la matrice colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. L'azione di una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su $\vec{v}$ è definita attraverso il prodotto righe per colonne come segue:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

1. Si scelga A come nell'esercizio 3, e si calcolino le coordinate di $\vec{u} = A\vec{v}$, per $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ripetere il calcolo per $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ognuno di questi casi, si rappresentino graficamente sul piano cartesiano i vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$. Infine, si dia un'interpretazione geometrica dell'azione di A.
2. Come il punto precedente, con A rimpiazzata da A^2.

3. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice B dell'esercizio 3. Si dia un'interpretazione geometrica al fatto che $B^2 = B$.
4. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice C dell'esercizio 3.
5. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice AB dell'esercizio 3.
6. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice BA dell'esercizio 3.
7. Si dia un'interpretazione geometrica al fatto che $AB \neq BA$.
8. Si dia un'interpretazione geometrica al fatto che $BC = CB = 0$.